Ejercicios de “Lógica informática” (2012–13)

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 22 de Septiembre de 2012

Índice general

Introducción

En el presente volumen se presentan los enunciados de los ejercicios del curso de "Lógica informática (2010–11)". Este volumen es complementario de Temas de "Lógica informática"(2010-11) y Soluciones de exámenes de Lógica informática.

En cada tema los ejercicios se han dividido en tres grupos:

- Ejercicios resueltos: son ejercicios comentados en las clases cuyas soluciones se encuentran en las transparencias y en Temas de "Lógica informática"(2010-11).
- Ejercicios propuestos.
- Ejercicios de exámenes: son ejercicios de exámenes de cursos anteriores y sus soluciones se encuentran en Soluciones de exámenes de Lógica informática.

Tema 1

Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

1.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.1 Determinar cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas proposicionales:

1. p
2. (p)
3. $(p \lor \neg q)$
4. $p \lor \neg q$
5. $\neg(p \lor p)$
6. $((p \to q) \lor (q \to p))$
7. $(p \lor \land q)$

Ejercicio 1.2 Definir por recursión sobre fórmulas las siguientes funciones

1. $\mathsf{np}(F)$ que calcula el número de paréntesis de la fórmula F. Por ejemplo, $\mathsf{np}((p \to (\neg q \lor p))) = 4$.
2. $\mathsf{Subf}(F)$ que calcula el conjunto de las subfórmulas de la fórmula F. Por ejemplo, $\mathsf{Subf}(p \to \neg q \lor p) = \{p \to \neg q \lor p, p, \neg q \lor p, \neg q, q\}$.

Ejercicio 1.3 Demostrar por inducción que todas las fórmulas proposicionales tienen un número par de paréntesis.

Ejercicio 1.4 Para la siguiente fórmula

$$p \to \neg q \lor p$$

escribir la fórmula con paréntesis, construir el árbol de análisis y determinar todas sus subfórmulas.

Ejercicio 1.5 Calcular el valor de la fórmula $(p \lor q) \land (\neg q \lor r)$ en las siguientes interpretaciones

1. I_1 tal que $I_1(p) = I_1(r) = 1, I_1(q) = 0$
2. I_2 tal que $I_2(r) = 1, I_2(p) = I_2(q) = 0$

Ejercicio 1.6 Demostrar que para toda fórmula F se tiene que para todo par de intepretaciones I_1, I_2, si $I_1(p) = I_2(p)$ para todos las variables proposicionales de F, entonces $I_1(F) = I_2(F)$.

Ejercicio 1.7 Determinar cuáles de las siguientes interpretaciones es modelo de la fórmula $(p \lor q) \land (\neg q \lor r)$

1. I_1 tal que $I_1(p) = I_1(r) = 1, I_1(q) = 0$
2. I_2 tal que $I_2(r) = 1, I_2(p) = I_2(q) = 0$

Ejercicio 1.8 Determinar si las siguientes fórmulas son satisfacible o insatisfacible.

1. $(p \to q) \land (q \to r)$
2. $p \land \neg p$

Ejercicio 1.9 Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. F es tautología syss $\neg F$ es insatisfacible.
2. Si F es tautología, entonces F es satisfacible.
3. Si F es satisfacible, entonces $\neg F$ es insatisfacible.

Ejercicio 1.10 En cada caso, determinar todos los modelos de la fórmula proposicional correspondiente:

1. $(p \to q) \lor (q \to p)$
2. $(p \to q) \land \neg(p \to q)$
3. $p \to q$

4. $p \vee \neg p$
5. $p \wedge \neg p$
6. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
7. $(p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$

Clasificar las fórmulas anteriores en tautologías, contingentes y contradicciones. ¿Cuáles son satisfacibles? ¿Cuáles son insatisfacibles?

Ejercicio 1.11 Demostrar que las fórmulas que aparecen en la transparencia 19 del tema 1 son tautologías:

1.	$F \rightarrow F$	ley de identidad
2.	$F \vee \neg F$	ley del tercio excluso
3.	$\neg(F \wedge \neg F)$	principio de no contradicción
4.	$(\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$	ley de Clavius
5.	$\neg F \rightarrow (F \rightarrow G)$	ley de Duns Scoto
6.	$((F \rightarrow G) \rightarrow F) \rightarrow F$	ley de Peirce
7.	$(F \rightarrow G) \wedge F \rightarrow G$	modus ponens
8.	$(F \rightarrow G) \wedge \neg G \rightarrow \neg F$	modus tollens

Ejercicio 1.12 Demostrar las equivalencias lógicas que aparecen en la transparencia 20 del tema 1:

1. Idempotencia: $F \vee F \equiv F$
   $F \wedge F \equiv F$
2. Conmutatividad: $F \vee G \equiv G \vee F$
   $F \wedge G \equiv G \wedge F$
3. Asociatividad: $F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H$
   $F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$
4. Absorción: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$
   $F \vee (F \wedge G) \equiv F$
5. Distributividad: $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$
   $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$
6. Doble negación: $\neg\neg F \equiv F$.
7. Leyes de De Morgan: $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$
   $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$

Ejercicio 1.13 Demostrar que $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.

Ejercicio 1.14 Determinar cuáles de las siguientes interpretaciones es modelo del conjunto de fórmulas $S = \{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), q \rightarrow r\}$.

1. I_1 tal que $I_1(p) = 1, I_1(q) = 0, I_1(r) = 1$.
2. I_2 tal que $I_2(p) = 0, I_2(q) = 1, I_2(r) = 0$.

Ejercicio 1.15 Calcular los modelos de los siguientes conjuntos de fórmulas y decidir cuáles son consistente.

1. $S_1 = \{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), p \rightarrow r\}$
2. $S_2 = \{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), p \rightarrow r, \neg r\}$

Ejercicio 1.16 Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$
2. $\{p\} \not\models p \land q$

Ejercicio 1.17 Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Para todo conjunto de fórmula S, $S \models S$.
2. Para todo conjunto de fórmula S_1 y toda fórmula F, si $S_1 \models F$ y $S_1 \subseteq S_2$, entonces $S_2 \models F$.
3. Para todo conjunto de fórmula S_1 y todo par de fórmulas F, G, si $S \models F$ y $\{F\} \models G$, entonces $S \models G$.

Ejercicio 1.18 Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$
2. $\models F_1 \land \cdots \land F_n \rightarrow G$
3. $\neg(F_1 \land \cdots \land F_n \rightarrow G)$ es insatisfacible
4. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente

Ejercicio 1.19 Determinar si los siguientes argumentos son lógicamente correctos:

1. Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7. Por tanto, habían taxis en la estación.

2. Si hay corriente y la lámpara no está fundida, entonces está encendida. La lámpara no está encendida. Hay corriente. Por tanto, la lámpara está fundida.

Ejercicio 1.20 Determinar la corrección del siguiente argumento.

Se sabe que

1. Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.
2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.

Ejercicio 1.21 En una isla hay dos tribus, la de los veraces (que siempre dicen la verdad) y la de los mentirosos (que siempre mienten). Un viajero se encuentra con tres isleños A, B y C y cada uno le dice una frase

1. A dice "B y C son veraces syss C es veraz"
2. B dice "Si A y C son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso"
3. C dice "B es mentiroso syss A o B es veraz"

Determinar a qué tribu pertenecen A, B y C.

1.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.22 Definir por recursión sobre fórmulas las siguientes funciones

1. $\mathsf{npi}(F)$ que calcula el número de paréntesis izquierdos de la fórmula F. Por ejemplo,
$\mathsf{npi}((p \rightarrow (\neg q \vee p))) = 2$.
2. $\mathsf{npd}(F)$ que calcula el número de paréntesis derechos de la fórmula F. Por ejemplo,
$\mathsf{npd}((p \rightarrow (\neg q \vee p))) = 2$.

Ejercicio 1.23 Demostrar por inducción que todas las fórmulas proposicionales tienen el mismo número de paréntesis izquierdos que de derechos.

Ejercicio 1.24 Para cada una de las siguientes fórmulas,

1. $\neg q \wedge q \wedge p \rightarrow r$

2. $p \to q \to \neg r \lor s \lor p$

escribir la fórmula con paréntesis, construir el árbol de análisis y determinar todas sus subfórmulas.

Ejercicio 1.25 Definir por recursión sobre fórmulas las siguientes funciones

1. $\mathsf{n_variables}(F)$ que calcula el número variables proposicionales que ocurren en la fórmula F. Por ejemplo, $\mathsf{n_variables}(p \to p \lor q) = 3$.

2. $\mathsf{profundidad}(F)$ que calcula la profundidad del árbol de análisis de la fórmula F. Por ejemplo,
$\mathsf{profundidad}(p \to p \lor q) = 2$.

Demostrar por inducción, que para toda fórmula F, $\mathsf{n_variables}(F) \leq 2^{\mathsf{profundidad}(F)}$.

Ejercicio 1.26 En cada caso, determinar todos los modelos de la fórmula proposicional correspondiente:

1. $p \to (q \to r \land q)$

2. $q \to (p \land \neg p) \to r$

3. $(p \leftrightarrow q) \land (p \to \neg q) \land p$

4. $(p \land r) \lor (\neg p \land q) \to \neg q$

Clasificar las fórmulas anteriores en tautologías, contingentes y contradicciones. ¿Cuáles son satisfacibles? ¿Cuáles son insatisfacibles?

Ejercicio 1.27 Para cada uno de los siguientes pares de fórmulas, decidir si son o no equivalentes:

1. $A \to B \to C$ y $A \land B \to C$

2. $A \to (B \land \neg C)$ y $A \to B \to C$

3. $\neg(A \leftrightarrow B)$ y $A \leftrightarrow \neg B$

Ejercicio 1.28 ¿Existe un conjunto S de tres fórmulas tal que de todos los subconjuntos de S sólo uno es consistente?

Ejercicio 1.29 Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $\{p \lor q\} \models p \to q$

2. $\{p \to q, \neg r \to \neg q\} \models p \to r$

3. $\{p \wedge \neg p\} \models r \leftrightarrow r \vee q$

4. $\{p \to q, q \to p \wedge r\} \models p \to (p \ \to q) \to r$

Ejercicio 1.30 Determinar si los siguientes argumentos son lógicamente correctos:

1. Si Juan es andaluz, entonces Juan es europeo. Juan es europeo. Por tanto, Juan es andaluz.

2. Cuando tanto la temperatura como la presión atmosférica permanecen contantes, no llueve. La temperatura permanece constante. En consecuencia, en caso de que llueva, la presión atmosférica no permanece constante.

3. Siempre que un número x es divisible por 10, acaba en 0. El número x no acaba en 0. Luego, x no es divisible por 10.

4. En cierto experimento, cuando hemos empleado un fármaco A, el paciente ha mejorado considerablemente en el caso, y sólo en el caso, en que no se haya empleado también un fármaco B. Además, o se ha empleado el fármaco A o se ha empleado el fármaco B. En consecuencia, podemos afirmar que si no hemos empleado el fármaco B, el paciente ha mejorado considerablemente.

Ejercicio 1.31 Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a dos puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que en cada una de las habitaciones puede haber un tigre o una dama. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que le lleva a la dama (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarle, en cada puerta hay un letrero:

- puerta 1: en esta habitación hay una dama y en la otra un tigre.
- puerta 2: en una de estas habitaciones hay una dama y en una de estas habitaciones hay un tigre.

Sabiendo que uno de los carteles dice la verdad y el otro no, determinar la puerta que debe de elegir el prisionero.

1.3. Ejercios de exámenes

Ejercicio 1.32 **[Examen 5–Mayo–2005]** ¿Es cierto que si $F \to G$ y F son satisfacibles, entonces G es satisfacible? Si es cierto, dar una explicación. Si no es cierto, dar un contraejemplo.

Ejercicio 1.33 [Examen 30–Junio–2005] Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Si F es una fórmula satisfacible, entonces todas las subfórmulas de F son satisfacibles.
2. Existen fórmulas válidas tales que todas sus subfórmulas son válidas.

Ejercicio 1.34 [Examen 5–Abril–2006] Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Si S_1 y S_2 son dos conjuntos consistentes de fórmulas, entonces $S_1 \cup S_2$ es consistente.
2. Si S_1 y S_2 son dos conjuntos inconsistentes de fórmulas, entonces $S_1 \cap S_2$ es inconsistente.

Ejercicio 1.35 [Examen 26–Junio–2006] Demostrar o refutar las siguiente proposición:
Si $\{F \rightarrow G,\ F\}$ es consistente, entonces $\{G\}$ es consistente.

Ejercicio 1.36 [Examen 7–Abril–2006] Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Existe un conjunto de fórmulas S y una fórmula F tal que $S \models F$ y $S \models \neg F$.
2. Existe un conjunto de fórmulas S y una fórmula F tal que $S \not\models F$ y $S \not\models \neg F$.

Ejercicio 1.37 [Examen 23–Septiembre–05] Demostrar o refutar las siguiente proposición: Para todo conjunto de fórmula S y para toda fórmula F se verifica que si $S \not\models F$ entonces $S \models \neg F$.

Tema 2

Deducción natural proposicional

2.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.1 Probar mediante deducción natural:

1. $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$
2. $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$
3. $\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p \vdash r \vee \neg p$
4. $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$
5. $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$
6. $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$
7. $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$
8. $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$
9. $\vdash p \rightarrow p$
10. $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$
11. $p \vee q \vdash q \vee p$
12. $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$
13. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$
14. $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$
15. $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

16. $p \land q \leftrightarrow q \land p$

17. $p \leftrightarrow q, p \lor q \vdash p \land q$

18. $p \rightarrow q \vdash \neg p \lor q$

Ejercicio 2.2 Demostrar la adecuación de las reglas de deducción natural:

1. $\land$i: $\{F, G\} \models F \land G$
2. $\land$e: $F \land G \models F$
3. $\land$e: $F \land G \models G$
4. $\neg\neg$e: $\{\neg\neg F\} \models F$
5. $\neg\neg$i: $\{F\} \models \neg\neg F$
6. $\rightarrow$ e: $\{F, F \rightarrow G\} \models G$
7. $\rightarrow$ i: Si $F \models G$, entonces $\models F \rightarrow G$.
8. $\bot$e: $\bot \models F$
9. $\neg$e: $\{F, \neg F\} \models \bot$
10. $\neg$i: Si $F \models \bot$, entonces $\models \neg F$.

Ejercicio 2.3 Demostrar las reglas derivadas.

1. Modus tollens:
$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F}\ MT$$

2. Introducción de la doble negación:
$$\frac{F}{\neg\neg F}\ \neg\neg\text{i}$$

3. Reducción al absurdo:
$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg F \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{F}\ RAA$$

4. Ley del tercio excluido:
$$\frac{}{F \lor \neg F}\ LEM$$

Ejercicio 2.4 Demostrar las equivalencias lógicas que aparecen en la transparencia 20 del tema 1:

1. Idempotencia: $F \vee F \equiv F$
   $F \wedge F \equiv F$

2. Conmutatividad: $F \vee G \equiv G \vee F$
   $F \wedge G \equiv G \wedge F$

3. Asociatividad: $F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H$
   $F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$

4. Absorción: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$
   $F \vee (F \wedge G) \equiv F$

5. Distributividad: $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$
   $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

6. Doble negación: $\neg\neg F \equiv F$.

7. Leyes de De Morgan: $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$
   $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$

2.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.5 Probar mediante deducción natural:

1. $p, p \to q \vdash q$

2. $p \to q, q \to r, p \vdash r$

3. $p \to (q \to r), p \to q, p \vdash r$

4. $p \to q, q \to r \vdash p \to r$

5. $p \to (q \to r) \vdash q \to (p \to r)$

6. $p \to (q \to r) \vdash (p \to q) \to (p \to r)$

7. $p \vdash q \to p$

8. $\vdash p \to (q \to p)$

9. $p \to q \vdash (q \to r) \to (p \to r)$

10. $p \to (q \to (r \to s)) \vdash r \to (q \to (p \to s))$

11. $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

12. $(p \to q) \to r \vdash p \to (q \to r)$

13. $p, q \vdash p \wedge q$
14. $p \wedge q \vdash p$
15. $p \wedge q \vdash q$
16. $p \wedge (q \wedge r) \vdash (p \wedge q) \wedge r$
17. $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$
18. $p \wedge q \vdash p \to q$
19. $(p \to q) \wedge (p \to r) \vdash p \to (q \wedge r)$
20. $p \to (q \wedge r) \vdash (p \to q) \wedge (p \to r)$
21. $p \to (q \to r) \vdash (p \wedge q) \to r$
22. $(p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)$
23. $p \vdash p \vee q$
24. $q \vdash p \vee q$
25. $p \vee q \vdash q \vee p$
26. $q \to r \vdash (p \vee q) \to (p \vee r)$
27. $p \vee p \vdash p$
28. $p \vdash p \vee p$
29. $p \vee (q \vee r) \vdash (p \vee q) \vee r$
30. $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$
31. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
32. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r \vdash p \wedge (q \vee r)$
33. $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
34. $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$
35. $(p \to r) \wedge (q \to r) \vdash (p \vee q) \to r$
36. $(p \vee q) \to r \vdash (p \to r) \wedge (q \to r)$
37. $p \vdash \neg\neg p$

38. $\neg p \vdash p \rightarrow q$

39. $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$

40. $p \lor q, \neg q \vdash p$

41. $p \lor q, \neg p \vdash q$

42. $p \lor q \vdash \neg(\neg p \land \neg q)$

43. $p \land q \vdash \neg(\neg p \lor \neg q)$

44. $\neg(p \lor q) \vdash \neg p \land \neg q$

45. $\neg p \land \neg q \vdash \neg(p \lor q)$

46. $\neg p \lor \neg q \vdash \neg(p \land q)$

47. $\vdash \neg(p \land \neg p)$

48. $p \land \neg p \vdash q$

49. $\neg\neg p \vdash p$

50. $\vdash p \lor \neg p$

51. $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

52. $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow q$

53. $\neg(\neg p \land q) \vdash p \lor q$

54. $\neg(\neg p \lor \neg q) \vdash p \land q$

55. $\neg(p \land q) \vdash \neg p \lor \neg q$

56. $\vdash (p \rightarrow q) \lor (q \rightarrow p)$

Ejercicio 2.6 Demostrar, por deducción natural, la corrección del siguiente argumento: *Se sabe que*

1. *Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.*

2. *Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.*

3. *Los ungulados de cuello largo son jirafas.*

4. *Los ungulados con rayas negras son cebras.*

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por tanto, el animal es una cebra.

Ejercicio 2.7 Demostrar por deducción natural cada una de las argumentaciones válidas del ejercicio 1.30.

Ejercicio 2.8 Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a dos puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que en cada una de las habitaciones puede haber un tigre o una dama. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que le lleva a la dama (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarle, en cada puerta hay un letrero:

- puerta 1: en esta habitación hay una dama y en la otra un tigre.
- puerta 2: en una de estas habitaciones hay una dama y en una de estas habitaciones hay un tigre.

Sabiendo que uno de los carteles dice la verdad y el otro no, demostrar por deducción natural que la dama está en la segunda puerta.

2.3. Ejercicios de exámenes

Ejercicio 2.9 Probar mediante deducción natural:

1. **[Examen de Junio de 2004]**

$$(E \lor F) \to G \vdash (E \to G) \land (F \to G)$$

2. **[Examen de Septiembre de 2004]**

$$\vdash (E \to (F \land G)) \to (E \to F) \lor (E \to G)$$

3. **[Examen de Abril de 2005]**

a) $\{p \to r, r \to \neg q\} \models \neg(p \land q)$

b) $p \lor q,\ \neg q \lor r \vdash p \lor r$

c) $\vdash (p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$

d) $(p \lor (q \to p)) \land q \vdash p$

e) $\neg(p \land \neg q) \vdash p \to q$

f) $(p \to q) \land (p \to r) \models p \to (q \land r)$

g) $(p1 \to p2) \land (q1 \to q2) \vdash (p1 \land q1 \to p2 \land q2)$

h) $\neg(\neg p \lor \neg q) \vdash p \land q$

i) $\vdash ((p \to q) \lor (p \to r)) \to (p \to q \lor r)$

j) $((\neg p \lor \neg q) \to (\neg p \land r)) \vdash \neg q \lor (p \lor r)$

4. **[Examen de Junio de 2005]**

$$p \land \neg(q \to r) \vdash (p \land q) \land \neg r$$

5. **[Examen de Septiembre de 2005]**

$$\vdash ((p \to (q \land \neg r)) \to p) \to p$$

6. **[Examen de Diciembre de 2005]**

$$\vdash (p \to \neg q) \land (p \to \neg r) \to (p \to \neg(q \lor r))$$

7. **[Examen de Abril de 2006]**

a) $(p \lor q) \land (p \to r) \vdash p \lor r$.

b) $\vdash (\neg p \to q) \to ((p \to q) \to q)$.

c) $\neg(\neg q \land p) \vdash p \to q$.

d) $\neg p \lor (r \to q) \vdash \neg q \to \neg(p \land r)$.

e) $\neg(p \land q) \vdash p \to \neg q$.

f) $(p \lor \neg q) \to p \land r \vdash \neg q \lor (\neg p \lor r)$.

g) $(p \to q) \land ((\neg r \lor q) \to s) \vdash \neg(p \land \neg s)$.

h) $\vdash (\neg(s \lor (p \to q))) \to (p \land \neg q \land \neg s)$.

8. **[Examen de Junio de 2006]**

$$\vdash ((p \land q) \to (r \lor s)) \to ((p \to r) \lor (q \to s))$$

9. **[Examen de Septiembre de 2006]**

$$(p \to r) \lor (q \to s) \vdash (p \land q) \to (r \lor s)$$

10. **[Examen de Diciembre de 2006]**

$$\vdash (\neg q \to \neg p) \lor (q \to p)$$

Tema 3

Tableros semánticos

3.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 3.1 Calcular, mediante tableros semánticos, los modelos de las siguientes fórmulas

- $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r))$.
- $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))$.

Ejercicio 3.2 Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. $I \models F \land G$ syss $I \models F$ e $I \models G$.
2. $I \models F \lor G$ syss $I \models F$ ó $I \models G$.

Ejercicio 3.3 Construir dos tableros completos distintos de $(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)$

Ejercicio 3.4 Decidir si

1. $\vdash_{Tab} \neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q)$.
2. $\vdash_{Tab} \neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r)$.
3. $\{p \to q, q \to r\} \vdash_{Tab} p \to r$.
4. $\{p \lor q\} \vdash_{Tab} p \land q$.

3.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.5 Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. $F \wedge G$ es satisfacible syss F es satisfacible y G es satisfacible.
2. $F \vee G$ es satisfacible syss F es satisfacible o G es satisfacible.
3. $F \wedge G$ es válida syss F es válida y G es válida.
4. $F \vee G$ es válida syss F es válida ó G es válida.

Ejercicio 3.6 Demostrar por deducción natural las equivalencias de la notación uniforme:

1. $\neg\neg F \equiv F$.
2. $\neg(A_1 \rightarrow A_2) \equiv A_1 \wedge \neg A_2$.
3. $\neg(A_1 \vee A_2) \equiv \neg A_1 \wedge \neg A_2$.
4. $A_1 \leftrightarrow A_2 \equiv (A_1 \rightarrow A_2) \wedge (A_2 \rightarrow A_1)$.
5. $B_1 \rightarrow B_2 \equiv \neg B_1 \vee B_2$.
6. $\neg(B_1 \wedge B_2) \equiv \neg B_1 \vee \neg B_2$.
7. $\neg(B_1 \leftrightarrow B_2) \equiv \neg(B_1 \rightarrow B_2) \vee \neg(B_2 \rightarrow B_1)$.

Ejercicio 3.7 Sea A la fórmula proposicional $p \wedge q \leftrightarrow \neg p \vee r$.

1. Escribir un tablero completo para A y otro para $\neg A$.
2. Describir todos los modelos y todos los contramodelos de la fórmula A.

Ejercicio 3.8 Decidir, mediante tableros semánticos, si:

1. $(p \rightarrow q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$ es una tautología.
2. $\{p \rightarrow (q \leftrightarrow r), r\} \models r \rightarrow (p \wedge q)$.
3. $\neg r \rightarrow \neg p \wedge \neg q \equiv p \vee q \rightarrow r \vee s$.

Ejercicio 3.9 Demostrar todos los apartados de los ejercicios 8.4 y 8.5 mediante el procedimiento de los tableros semánticos.

Ejercicio 3.10 Demostrar, mediante tableros semánticos, la corrección de los argumentos válidos de los ejercicios 1.20, 1.30 y 7.34.

3.3. Ejercicios de exámenes

Ejercicio 3.11 [Examen de diciembre de 2000] Probar, usando tableros semánticos, que la fórmula

$$(p \to \neg q \land r) \to (p \to (q \to r))$$

es una tautología.

Ejercicio 3.12 [Examen de junio de 2001] Decidir, usando tableros semánticos, si la fórmula

$$(p \land q \leftrightarrow p \lor q) \to (p \to q)$$

es insatisfactible o una tautología.

Ejercicio 3.13 [Examen de junio de 2001] Decidir, mediante tableros semánticos, si

$$\{p \lor q \to r \lor s, r \land t \to s, r \land \neg t \to \neg u\} \models p \to s \lor \neg u$$

Ejercicio 3.14 [Examen de septiembre de 2001 Probar, mediante tableros semánticos, que la fórmula

$$(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \lor q \to r))$$

es una tautología.

Ejercicio 3.15 [Examen de diciembre de 2001] Demostrar por el método de tableros semánticos que

$$(p \lor q \leftrightarrow \neg r) \land (\neg p \to s) \land (\neg t \to q) \land (s \land t \to u) \models r \to u$$

Ejercicio 3.16 [Examen de junio de 2002] Probar, mediante tableros semánticos, que

$$(r \to p) \land (\neg r \to q \lor s) \to p \lor q \lor s$$

es una tautología.

Ejercicio 3.17 [Examen de septiembre de 2002] Sean

- $A : \neg r \to s \land \neg u$ y
- $B : (r \lor s) \land (u \to r)$.

Probar, mediante tableros semánticos que A y B son lógicamente equivalentes.

Ejercicio 3.18 [Examen de junio de 2003] Se considera el conjunto de fórmulas

$$S = \{p \to q, q \leftrightarrow r \land s, \neg s \land r \to q, \neg q\}$$

1. Probar, mediante tableros semánticos, que S es consistente.

2. Obtener todos los modelos de S.

Ejercicio 3.19 [Examen de septiembre de 2003] Dadas las fórmulas

$A : (s \to p) \lor (t \to q)$ y

$B : (s \to q) \lor (t \to p)$,

se pide

1. Probar que $A \models B$, mediante tableros semánticos.
2. Describir, razonadamente, todos los modelos de A y, a continuación, probar nuevamente que $A \models B$, utilizando la definición de consecuencia lógica.

Ejercicio 3.20 [Examen de diciembre de 2003] Probar mediante un tablero semántico que

$$(p \to q) \land ((r \to \neg t) \land (q \to r)) \to (p \to \neg t)$$

es una tautología.

Ejercicio 3.21 [Examen de junio de 2004] Este ejercicio tiene tres apartados.

1. Probar $E \to (F \to G) \not\models (E \to F) \to G$ mediante tableros semánticos.
2. Describir todos los modelos de $E \to (F \to G)$ que no son modelos de $(E \to F) \to G$.
3. La fórmula $E \to (F \to G) \to (E \to F) \to G$, ¿es una tautología? Razonar la respuesta.

Ejercicio 3.22 [Examen de septiembre de 2004] En un texto de Lewis Carroll, el tío Jorge y el tío Jaime discuten acerca de la barbería del pueblo, atendida por tres barberos: Alberto, Benito y Carlos. Los dos tíos aceptan las siguientes premisas:

1. Si Carlos no está en la barbería, entonces ocurrirá que si tampoco está Alberto, Benito tendrá que estar para atender el establecimiento.
2. Si Alberto no está, tampoco estará Benito.

El tío Jorge concluye de todo esto que Carlos no puede estar ausente, mientras que el tío Jaime afirma que sólo puede concluirse que Carlos y Alberto no pueden estar ausentes a la vez. Decidir con el método de los tableros semánticos cuál de los dos tiene razón.

Ejercicio 3.23 [Examen de septiembre de 2004] Probar que la fórmula

$$(E \to (F \land G)) \to (E \to F) \lor (E \to G)$$

es una tautología por tableros semánticos.

Ejercicio 3.24 [Examen de abril de 2005] Decidir, mediante tableros semánticos, si

$$\{p \to r, q \to r\} \models p \lor q \to r$$

Ejercicio 3.25 [Examen de abril de 2005] Decidir, mediante tableros semánticos, si

$$(p \to q) \lor (p \to r) \models p \to (q \land r).$$

Ejercicio 3.26 [Examen de junio de 2005] Decidir, mediante tablero semántico, si

$$\{\neg p \to (q \land r)\} \models q \to p$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir del tablero.

Ejercicio 3.27 [Examen de septiembre de 2005] Decidir, mediante tablero semántico, si

1. $\{r \to \neg(p \land \neg q),\ ((p \to r) \to (\neg q \leftrightarrow r)) \land \neg r\} \models q$
2. $\models ((p \to q) \to r) \to (q \to r)$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir del tablero.

Ejercicio 3.28 [Examen de diciembre de 2005] Mediante tableros semánticos, determinar cuáles de las siguientes fórmulas son tautologías y calcular los contramodelos de las que no lo sean.

1. $((\neg p \to q) \lor (\neg q \to r)) \to (\neg r \to (p \lor q))$
2. $((\neg p \to q) \lor (\neg q \to r)) \to ((\neg p \lor \neg q) \to r)$

Ejercicio 3.29 [Examen de abril de 2006] Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula

$$p \land (q \lor s) \to (p \leftrightarrow q) \lor (p \leftrightarrow r)$$

es una tautología, En el caso de que no lo sea, construir un contramodelo a partir del tablero.

Ejercicio 3.30 [Examen de abril de 2006] Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula

$$(p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)$$

es una tautología, En el caso de que no lo sea, calcular a partir de un tablero completo sus contramodelos.

Ejercicio 3.31 [Examen de junio de 2006] Sea F la fórmula $(p \to q) \to \neg(q \lor r) \land \neg p$.

1. Decidir, mediante tablero semántico, si F es una tautología.

2. Si F no es una tautología, calcular, a partir de su tablero semántico y los contramodelos de F.

Ejercicio 3.32 [Examen de junio de 2006] Demostrar o refutar la siguiente proposición:

> Si S es un conjunto inconsistente de fórmulas, entonces el tablero semántico cerrado de S obtenido aplicando las reglas α antes que las reglas β tiene menos nodos que el tablero semántico cerrado de S obtenido aplicando las reglas β antes que las reglas α.

Ejercicio 3.33 [Examen de septiembre de 2006] Sea F la fórmula

$$((p \lor q) \leftrightarrow \neg(p \lor q)) \lor (((\neg p \lor q) \rightarrow \neg((q \land r) \rightarrow \neg p)) \land (r \rightarrow \neg(q \lor p)))$$

Decidir, mediante tablero semántico, si F es satisfacible. En el caso de que lo sea, calcular un modelo v de F a partir del tablero y comprobar que v es modelo de F.

Tema 4

Formales normales

4.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 4.1 Para cada una de las siguientes fórmulas, determinar si están en FNC, en FND, en ambas o en ninguna de las dos.

1. $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.
2. $(\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow p)$.
3. $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$.
4. $(\neg p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$.

Ejercicio 4.2 Calcular una forma normal conjuntiva de cada una de las siguientes fórmulas

1. $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$.
2. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$.
3. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$.

Ejercicio 4.3 Calcular una forma normal disjuntiva de cada una de las siguientes fórmulas

1. $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$.
2. $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$.

Ejercicio 4.4 Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n$ es una tautología syss $F_1, \ldots, F_n$ lo son.

2. $L_1 \vee \cdots \vee L_n$ es una tautología syss $\{L_1, \ldots, L_n\}$ contiene algún par de literales complementarios (i.e. existen i, j tales que $L_i = L_j^c$).

Ejercicio 4.5 Decidir, mediante forma normal conjuntiva, si las siguientes fórmulas son tautotologías. En el caso de de que no lo sean calcular sus contramodelos a partir de su FNC.

1. $\neg(p \wedge (q \to r))$.
2. $(p \to q) \vee (q \to p)$.
3. $(p \leftrightarrow q) \to r$.

Ejercicio 4.6 Demostrar o refutar las siguientes proposiciones

1. $F_1 \vee \cdots \vee F_n$ es satisfacible syss alguna de las fórmulas $F_1, \ldots, F_n$ lo es.
2. $L_1 \wedge \cdots \wedge L_n$ es satisfacible syss $\{L_1, \ldots, L_n\}$ no contiene ningún par de literales complementarios.

Ejercicio 4.7 Decidir, mediante forma normal disyuntiva, si las siguientes fórmulas son satisfacibles. En el caso de de que lo sean calcular sus modelos a partir de su FND.

1. $\neg(p \wedge (q \to r))$.
2. $\neg(\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q))$.

Ejercicio 4.8 Calcular, mediante tableros semánticos,

1. una forma normal disyuntiva de $\neg(p \vee q \to p \wedge q)$.
2. una forma normal conjuntiva $p \vee q \to p \wedge q$.

Ejercicio 4.9 Calcular, mediante tableros semánticos, los modelos y una forma normal disyuntiva de las siguientes fórmulas

- $\neg(\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge r))$.
- $\neg(\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q))$.

4.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.10 Para cada una de las siguientes fórmulas, determinar si están en FNC, en FND, en ambas o en ninguna de las dos.

1. $(p \lor q) \land (r \lor \neg p) \land s$.
2. $p \lor q \lor s$.
3. $p \land (\neg p \lor q) \land (p \to s)$.
4. $t \lor q \lor r \land s$.

Ejercicio 4.11 Demostrar, por deducción natural, las reglas de normalización:

1. $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \land (B \to A)$.
2. $A \to B \equiv \neg A \lor B$.
3. $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$.
4. $\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$.
5. $\neg\neg A \equiv A$.
6. $A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$.
7. $(A \land B) \lor C \equiv (A \lor C) \land (B \lor C)$.
8. $A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$.
9. $(A \lor B) \land C \equiv (A \land C) \lor (B \land C)$.

Ejercicio 4.12 Para cada una de las siguientes fórmulas

1. $\neg(p \leftrightarrow q \to r)$.
2. $\neg(p \land q \land r) \lor (p \land q \lor r)$.
3. $(p \to r \lor s) \land (r \to s) \land \neg(p \to s)$.

a. Calcular una FNC, decidir si es o no una tautología y determinar, en su caso, todos sus contramodelos.

b. Calcular una FND, decidir si es o no satisfacible y determinar, en su caso, todos sus modelos.

Ejercicio 4.13 Empleando una FNC o bien una FND, según consideres más adecuado, decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $\{p \leftrightarrow q, q \vee s\} \models s \to p$.
2. $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$.

Ejercicio 4.14 Determinar una FNC y una FND de la fórmula F cuya tabla de verdad es la siguiente:

p	q	r	F
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

Ejercicio 4.15 Sea A la fórmula proposicional $p \wedge q \leftrightarrow \neg p \vee r$.

1. Escribir un tablero completo para A y otro para $\neg A$.
2. Describir todos los modelos y todos los contramodelos de la fórmula A.
3. Calcular una FNC y una FND de A.

4.3. Ejercicios de exámenes

Ejercicio 4.16 [Examen de Diciembre de 2000] Probar, mediante forma normal conjuntiva. que la fórmula

$$(p \to \neg q \wedge r) \to (p \to (q \to r))$$

es una tautología

Ejercicio 4.17 [Examen de Junio de 2001] Decidir, utilizando formas normales, si la fórmula

$$(p \to \neg(q \to \neg r)) \wedge (r \to \neg q)$$

es insatisfactible o una tautología.

Ejercicio 4.18 [Examen de Diciembre de 2003] Utilizando una forma normal, probar que

$$\neg(\neg t \leftrightarrow (\neg t \wedge p)) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg t)$$

es satisfactible.

Ejercicio 4.19 [Examen de Septiembre de 2004] Probar, usando formas normales, que la fórmula

$$(E \rightarrow (F \wedge G)) \rightarrow (E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G)$$

es una tautología.

Ejercicio 4.20 [Examen de Abril de 2005] Sea F la fórmula $p \vee q \leftrightarrow \neg r$. Calcular una forma normal conjuntiva de F y, a partir de ella, determinar los contramodelos de F y decidir si F es una tautología.

Ejercicio 4.21 [Examen de Abril de 2005] Calcular una forma normal conjuntiva de la fórmula F sabiendo que está compuesta con las tres variables p, q y r y que, para toda interpretación I, se tiene que

$$I(F) = \begin{cases} 1, & \text{si } I(p) = I(\neg q \vee r) \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejercicio 4.22 [Examen de Abril de 2005] Calcular una forma normal disyuntiva de A y una forma normal conjuntiva de $\neg A$ siendo A la fórmula cuya tabla de verdad es

p	q	r	A
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Ejercicio 4.23 [Examen de Diciembre de 2005] Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Sean G_1 una forma normal disyuntiva de F_1 y G_2 una forma normal disyuntiva de F_2. Si F_1 y F_2 son equivalentes, entonces G_1 y G_2 son fórmulas iguales.

2. Para toda fórmula F se tiene que si G_1 es una forma normal conjuntiva de F y G_2 es una forma normal normal disyuntiva de F, entonces G_1 y G_2 son fórmulas distintas.

Tema 5

Resolución proposicional

5.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.1 Demostrar las siguientes proposiciones:

- En cualquier interpretación I, $I(\square) = 0$.
- La cláusula $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ es equivalente a la fórmula $L_1 \lor L_2 \lor \cdots \lor L_n$.
- El conjunto de cláusulas $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$ es equivalente a la fórmula $(L_{1,1} \lor \cdots \lor L_{1,n_1}) \land \cdots \land (L_{m,1} \lor \cdots \lor L_{m,n_m})$.
- Si $(L_{1,1} \lor \cdots \lor L_{1,n_1}) \land \cdots \land (L_{m,1} \lor \cdots \lor L_{m,n_m})$ es una forma normal conjuntiva de la fórmula F. Entonces, una forma clausal de F es
  $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$.

Ejercicio 5.2 Calcular una forma clausal de las siguientes fórmulas:

1. $\neg(p \land (q \to r))$.
2. $p \to q$.
3. $(p \to q) \land r$.
4. $\neg\neg r \land (\neg q \to \neg p)$.

Ejercicio 5.3 Demostrar o refutar: Si dos fórmulas son distintas, sus formas clausales son distintas.

Ejercicio 5.4 Demostrar que si $S_1, \dots, S_n$ son formas clausales de $F_1, \dots, F_n$, entonces $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \dots, F_n\}$.

Ejercicio 5.5 Decidir si la interpretación I tal que $I(p) = I(q) = 1$ es un modelo del conjunto de cláusulas $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$.

Ejercicio 5.6 Decidir si los siguientes conjuntos de cláusulas son consistentes:

1. $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$.
2. $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$.

Ejercicio 5.7 Demostrar que si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.

Ejercicio 5.8 Demostrar que $\{F_1, \dots, F_n\}$ es consistente syss $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ es consistente.

Ejercicio 5.9 Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y S una forma clausal de $\neg G$. Demostrar que son equivalentes

1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
2. $\{F_1, \dots, F_n \neg G\}$ es inconsistente.
3. $S_1 \cup \cdots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.

Ejercicio 5.10 Calcular:

1. $\text{Res}_q(\{p, q\}, \{\neg q, r\})$.
2. $\text{Res}_q(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\})$.
3. $\text{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\})$.
4. $\text{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{q, p\})$.
5. $\text{Res}_p(\{p\}, \{\neg p\})$.
6. $\text{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\})$.
7. $\text{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, q\})$.
8. $\text{Res}(\{\neg p, q\}, \{q, r\})$.

¿Pertenece $\square$ a $\text{Res}(\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\})$?

Ejercicio 5.11 Construir una refutación por resolución del conjunto de cláusulas

$$\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}.$$

Ejercicio 5.12 Demostrar por resolución la fórmula $p \wedge q$ a partir del conjunto de fórmulas $\{p \vee q, p \leftrightarrow q\}$.

Ejercicio 5.13 Demostrar las siguientes proposiciones:

1. Si C es una resolvente de C_1 y C_2, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.
2. Si el conjunto de cláusulas S es refutable, entonces S es inconsistente.
3. Si S es un conjunto de fórmulas y F es una fórmula tal que $S \vdash_{Res} F$, entonces $S \models F$.

Ejercicio 5.14 [T]

1. Encontrar dos cláusulas C_1 y C_2 tales que $\{C_1\} \models C_2$ pero C_2 no es demostrable por resolución a partir de $\{C_1\}$.
2. Demostrar que si F_1 y F_2 son dos fórmulas cuyas formas clausales son C_1 y C_2, respectivamente, entonces $\{F_1\} \vdash_{Res} F_2$.

Ejercicio 5.15 Construir el grafo de resolución por saturación de
$\{\{p,q\}, \{\neg p,q\}, \{p,\neg q\}, \{\neg p,\neg q\}\}$.

Ejercicio 5.16 Construir el grafo de resolución por saturación simplificada de los siguientes conjuntos y, a partir del grafo, hallar una refutación o un modelo del conjunto.

1. $\{\{p,q\}, \{\neg p,q\}, \{p,\neg q\}, \{\neg p,\neg q\}\}$.
2. $\{\{p\}, \{\neg p,q\}, \{\neg q,\neg r\}\}$.

Ejercicio 5.17 Contruir un grafo de resolución positiva del conjunto
$\{\{p,q\}, \{\neg p,q\}, \{p,\neg q\}, \{\neg p,\neg q\}\}$.

Ejercicio 5.18 Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Si S es un conjunto de cláusulas inconsistente, entonces existe una refutación de S mediante resolución unitaria.
2. Si S es un conjunto de cláusulas inconsistente, entonces existe una refutación de S mediante resolución por entradas.

Ejercicio 5.19 Decidir mediante resolución lineal si el siguiente conjunto es consistente
$\{\{p,q\}, \{\neg p,q\}, \{p,\neg q\}, \{\neg p,\neg q\}\}$.

Ejercicio 5.20 Demostrar, mediante resolución lineal, la corrección del siguiente argumento:
Se sabe que

1. *Los animales con pelo que dan leche son mamíferos.*

2. *Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.*

3. *Los ungulados de cuello largo son jirafas.*

4. *Los ungulados con rayas negras son cebras.*

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por tanto, el animal es una cebra.

5.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.21 Indicar en cuáles de los siguientes ejemplos se ha aplicado correctamente la regla de resolución proposicional y en cuáles no. En este último caso, escribir las resolventes correctas.

1. $\{p, q, r, s\}$ es una resolvente de $\{p, q, r\}$ y $\{p, q, s\}$.

2. $\{p\}$ es una resolvente de $\{p, q\}$ y $\{p, \neg q\}$.

3. $\square$ es una resolvente de $\{p, \neg q\}$ y $\{\neg p, q\}$.

4. $\{r, \neg r\}$ es una resolvente de $\{r, \neg r\}$ y $\{r, \neg r\}$.

Ejercicio 5.22 Usando resolución proposicional (traduciendo previamente las fórmulas a conjuntos de cláusulas), demostrar que:

1. $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \land (p \leftrightarrow q) \land (p \rightarrow \neg r)$ es una contradicción.

2. $\{p \rightarrow q, q \rightarrow p \land r\} \models p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r)$.

Ejercicio 5.23 Usando resolución proposicional, determinar si:

1. $\{p \lor q \lor r, \neg p \lor q, \neg q \lor r, \neg r, p \lor r\}$ es consistente.

2. $\{p \lor q, \neg p \lor \neg q, p \lor \neg q, \neg p \lor q \lor r, \neg r \lor s\}$ es consistente.

3. $\{\neg p \lor \neg q \lor r, p \lor r, q \lor r\} \models r$.

Ejercicio 5.24 Ash, Misty y Brock han organizado una batalla entre sus Pokemon. Se conocen los siguientes datos al respecto:

(a) Uno, y sólo uno, de los siguientes Pokemon fue el vencedor: Pikachu, Bulbasaur, Togepi, Starmie, Vulpix y Onix.

(b) Ash ganó la batalla si el Pokemon vencedor fue Pikachu o Bulbasaur.

(c) Si o bien Togepi o bien Starmie fue el vencedor, Misty ganó la batalla.

(d) Brock ganó la batalla si el vencedor fue Onix o Vulpix.

(e) Si Onix fue derrotado, Starmie también.

(f) Bulbasaur fue derrotado.

(g) Si Pikachu fue derrotado, entonces Ash no ganó la batalla.

(h) Brock no ganó la batalla si Bulbasaur fue derrotado.

(i) Si Vulpix fue derrotado, Togepi y Onix también corrieron la misma suerte.

Se pide:

1. Formalizar los datos anteriores en el lenguaje de la lógica proposicional.
2. Para cada fórmula obtenida, escribir un conjunto de cláusulas equivalente.
3. Usando resolución proposicional, demostrar que Ash fue el ganador.

Ejercicio 5.25 Probar, mediante resolución lineal, que
$\{r \leftrightarrow p \vee q, s \rightarrow p, \neg s \wedge \neg r \rightarrow s \vee t\} \models \neg p \rightarrow (q \vee t)$.

Ejercicio 5.26 Dados los conjuntos de fórmulas:
$S = \{p \rightarrow q, q \leftrightarrow r \wedge s, \neg s \wedge r \rightarrow q, \neg q\}$
$T = \{q \vee r, \neg q \vee \neg r\}$
Probar, mediante resolución lineal, que $S \cup T$ es inconsistente.

Ejercicio 5.27 Demostrar por resolución cada una de las argumentaciones válidas del ejercicio 1.30.

Ejercicio 5.28 Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a dos puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que en cada una de las habitaciones puede haber un tigre o una dama. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que le lleva a la dama (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarle, en cada puerta hay un letrero:

- puerta 1: en esta habitación hay una dama y en la otra un tigre.
- puerta 2: en una de estas habitaciones hay una dama y en una de estas habitaciones hay un tigre.

Sabiendo que uno de los carteles dice la verdad y el otro no, demostrar mediante resolución que la dama está en la segunda puerta.

5.3. Ejercicios de exámenes

Ejercicio 5.29 [Examen de diciembre de 2000] Sea $U = \{\neg A_1 \vee \neg B_1 \vee C_2, \neg A_1 \vee B_1, \neg A_2 \vee B_2, A_1, A_2\}$. Probar, mediante resolución lineal, que $U \models C_2$.

Ejercicio 5.30 [Examen de junio de 2001] Decidir, mediante resolución, si la siguiente fórmula es una tautología $(q \to p \wedge r) \wedge \neg(p \leftrightarrow p \vee q)$

Ejercicio 5.31 [Examen de septiembre de 2001] Probar, por resolución, que la siguiente fórmula es una tautología: $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q \to r))$

Ejercicio 5.32 [Examen de diciembre de 2001] Probar por resolución que
$\{p \vee q \leftrightarrow \neg r, \neg p \to s, \neg t \to q, s \wedge t \to u\} \models r \to u.$

Ejercicio 5.33 [Examen de septiembre de 2002] Probar, mediante resolución lineal, que la fórmula
$\neg r \to s \wedge \neg u$
es consecuencia lógica de
$U = \{q \vee r \vee s, r \to q \vee t, q \to \neg p, t \to u, u \to \neg s, p\}.$

Ejercicio 5.34 [Examen de septiembre de 2003] Probar, mediante resolución por entradas, que
$(s \to p) \vee (t \to q) \models (s \to q) \vee (t \to p).$

Ejercicio 5.35 [Examen de diciembre de 2003] Sean F y G las siguientes fórmulas:
$F : (p \to q) \wedge ((r \to \neg t) \wedge (q \to r))$
$G : \neg(\neg t \leftrightarrow (\neg t \wedge p)) \to \neg(p \to \neg t)$
Probar, mediante resolución, que $\{F, G\} \models r \to p$.

Ejercicio 5.36 [Examen de junio de 2004] Probar, por resolución, que
$(E \vee F) \to G \models (E \to G) \wedge (F \to G)$

Ejercicio 5.37 [Examen de septiembre de 2004] Probar, por resolución, la inconsistencia del conjunto
$\{\neg E \to F \vee G,\ E \to F \vee G,\ G \to F,\ F \to E,\ E \to \neg F\}$

Ejercicio 5.38 [Examen de Abril de 2006] Decidir, mediante resolución, si
$\{C \to A, G \to D, \neg(B \wedge C \wedge G \to E)\} \models A \wedge B \wedge D.$
En el caso que no lo sea, construir un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 5.39 [Examen de aabril de 2006] Juan está matriculado en tres asignaturas, Álgebra, Lógica y Dibujo. Juan comenta que

Me gusta al menos una de las tres asignaturas. Si me gustase el Álgebra pero no el Dibujo, me gustaría la Lógica. O me gusta el Dibujo y la Lógica, o bien ninguna de las dos. Si me gustase el Dibujo, entonces me gustaría el Álgebra.

Los comentarios de Juan pueden formalizarse por

$\{A \vee D \vee L, (A \wedge \neg D) \to L, (D \wedge L) \vee (\neg D \wedge \neg L), D \to A\}$

Decidir, mediante resolución, si los comentarios de Juan son consistentes y, en su caso, calcular sus modelos a partir de la resolución. ¿Qué asignaturas le gustan a Juan?

Ejercicio 5.40 [Examen de abril de 2006] Decidir, mediante resolución, si

$\{p \to q, \neg p \to r, q \vee r \to s\} \models s.$

En el caso que no lo sea, construir un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 5.41 [Examen de Abril de 2006] Decidir, mediante resolución, si r es consecuencia lógica de

$\{p \leftrightarrow q, \neg p \to r, \neg s \wedge \neg t \to q, \neg s \wedge t\}.$

En el caso que no lo sea, construir un contramodelo a partir de la resolución.

Tema 6

Algoritmos para SAT. Aplicaciones

6.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 6.1 Demostrar que si S un conjunto de cláusulas y $C \in S$ una tautología, Entonces, $S \approx S \setminus \{C\}$.

Ejercicio 6.2 Demostrar que si S un conjunto de cláusulas y $\{L\}$ una cláusula unitaria de S, entonces $S \approx \mathit{eliminacionUnitaria}(S, L)$.

Ejercicio 6.3 Reducir, aplicando eliminación unitaria, el conjunto $\{\{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p\}, \{r, u\}\}$.

Ejercicio 6.4 Demostrar que si S es un conjunto de cláusulas y L un literal puro de S, entonces $S \approx \mathit{eliminacionPuro}(S, L)$.

Ejercicio 6.5 Reducir, aplicando eliminación de literales puros, el conjunto $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{r, q\}, \{r$

Ejercicio 6.6 Sea L un literal del conjunto de cláusulas S. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. S es consistente,
2. $(S \cup \{L\})$ ó $(S \cup \{L^c\})$ es consistente,
3. $\mathit{elimacionUnitaria}(S, L)$ ó $\mathit{elimacionUnitaria}(S, L^c)$ es consistente,

Ejercicio 6.7 Decidir, mediante el algoritmo DPLL, si los siguientes conjuntos de cláusulas son consistentes:

1. $\{\{a, b\}, \{\neg a, b\}, \{a, \neg b\}, \{a, \neg d\}, \{\neg a, \neg b, \neg c\}, \{b, \neg c\}, \{c, \neg f\}, \{f\}\}$
2. $\{\{p, q\}, \{\neg q\}, \{\neg r\}\}$
3. $\{\{\neg q, r\}, \{\neg r, p\}, \{\neg r, q\}, \{\neg p, q, r\}, \{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$

Ejercicio 6.8 En una isla hay dos tribus, la de los veraces (que siempre dicen la verdad) y la de los mentirosos (que siempre mienten). Un viajero se encuentra con tres isleños A, B y C y cada uno le dice una frase

- A dice "B y C son veraces syss C es veraz"
- B dice "Si A y B son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso"
- C dice "B es mentiroso syss A o B es veraz"

Determinar a qué tribu pertenecen A, B y C.

Ejercicio 6.9 Disponemos de una base de conocimiento compuesta de reglas sobre clasificación de animales y hechos sobre características de un animal.

- Regla 1: Si un animal es ungulado y tiene rayas negras, entonces es una cebra.
- Regla 2: Si un animal rumia y es mamífero, entonces es ungulado.
- Regla 3: Si un animal es mamífero y tiene pezuñas, entonces es ungulado.
- Hecho 1: El animal tiene es mamífero.
- Hecho 2: El animal tiene pezuñas.
- Hecho 3: El animal tiene rayas negras.

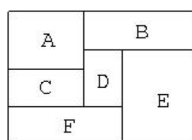
Demostrar a partir de la base de conocimientos que el animal es una cebra.

Ejercicio 6.10 Decidir si es posible colorear los vértices de un pentágono de rojo o azul de forma que los vértices adyacentes tengan colores distintos.

Ejercicio 6.11 Decidir si es posible colorear los vértices de un pentágono de rojo, azul o negro de forma que los vértices adyacentes tengan colores distintos.

Ejercicio 6.12 Cuatro palomas comparten tres huecos. Decidir si es posible que no haya dos palomas en el mismo hueco.

Ejercicio 6.13 Un rectángulo se divide en seis rectángulos menores como se indica en la figura. Demostrar que si cada una de los rectángulos menores tiene un lado cuya medida es un número entero, entonces la medida de alguno de los lados del rectángulo mayor es un número entero.



Ejercicio 6.14 Calcular las formas de colocar 4 reinas en un tablero de 4x4 de forma que no haya más de una reina en cada fila, columna o diagonal.

Nota: Usar la siguiente simbolización: `cij` ($1 \leq i, j \leq 4$) para indicar que hay una reina en la fila `i` columna `j`.

Ejercicio 6.15 Probar el caso más simple del teorema de Ramsey: entre seis personas siempre hay (al menos) tres tales que cada una conoce a las otras dos o cada una no conoce a ninguna de las otras dos.

Nota: Usar la siguiente simbolización:

- 1, 2, 3, 4, 5 y 6 para representar a las personas;
- `pij` ($1 \leq i < j \leq 6$) para indicar que las personas `i` y `j` se conocen.

6.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.16 Decidir, mediante DPLL, si las siguientes fórmulas son tautologías. En el caso de que no lo sean calcular extraer un contramodelo del cálculo.

1. $\neg(p \land (q \to r))$.
2. $(p \to q) \lor (q \to p)$.
3. $(p \leftrightarrow q) \to r$.

Ejercicio 6.17 Decidir, mediante DPLL, si las siguientes fórmulas son satisfacibles. En el caso de de que lo sean extraer un modelo del cálculo.

1. $\neg(p \land (q \to r))$.
2. $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))$.
3. $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r))$.
4. $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))$.

Ejercicio 6.18 Para cada una de las siguientes fórmulas

1. $\neg(p \leftrightarrow q \to r)$.
2. $\neg(p \land q \land r) \lor (p \land q \lor r)$.
3. $(p \to r \lor s) \land (r \to s) \land \neg(p \to s)$.

Decidir por DPLL

- si es una tautología y calcular, en su caso, un contramodelo.
- si es satisfacible y calcular, en su caso, un modelo.

Ejercicio 6.19 Decidir, mediante DPLL, cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $\{p \leftrightarrow q,\ q \vee s\} \models s \rightarrow p$.
2. $p \rightarrow q\ \equiv \neg q \rightarrow \neg p$.
3. $\{p \rightarrow (q \rightarrow r), r \rightarrow q\} \models r \leftrightarrow q$.
4. $\{p \rightarrow q, q \rightarrow (p \wedge q), p \rightarrow r\} \models q \rightarrow r$.

Ejercicio 6.20 Ash, Misty y Brock han organizado una batalla entre sus Pokemon. Se conocen los siguientes datos al respecto:

(a) Uno, y sólo uno, de los siguientes Pokemon fue el vencedor: Pikachu, Bulbasaur, Togepi, Starmie, Vulpix y Onix.

(b) Ash ganó la batalla si el Pokemon vencedor fue Pikachu o Bulbasaur.

(c) Si o bien Togepi o bien Starmie fue el vencedor, Misty ganó la batalla.

(d) Brock ganó la batalla si el vencedor fue Onix o Vulpix.

(e) Si Onix fue derrotado, Starmie también.

(f) Bulbasaur fue derrotado.

(g) Si Pikachu fue derrotado, entonces Ash no ganó la batalla.

(h) Brock no ganó la batalla si Bulbasaur fue derrotado.

(i) Si Vulpix fue derrotado, Togepi y Onix también corrieron la misma suerte.

Demostrar, mediante DPLL, que Ash fue el ganador.

Ejercicio 6.21 Decidir, mediante DPLL, la validez de cada una de las argumentaciones del ejercicio 1.30.

Tema 7

Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

7.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 7.1 Formalizar el siguiente argumento: *“Si una ciudad es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla”.*

Ejercicio 7.2 Para representar el mundo de los bloque se parte de los siguientes predicados primitivos:

- sobre(x, y) se verifica si el bloque x está colocado sobre el bloque y
- sobre_mesa(x) se verifica si el bloque x está sobre la mesa

Definir las siguientes relaciones:

- bajo(x, y) se verifica si el bloque x está debajo del bloque y.
- encima(x, y) se verifica si el bloque x está encima del bloque y, pudiendo haber otros bloques entre ellos.
- libre(x) se verifica si el bloque x no tiene bloques encima
- pila(x, y, z) se verifica si el bloque x está sobre el y, el y sobre el z y el z sobre la mesa.

Representar la siguiente propiedad: el bloque central de cualquier pila no está libre.

Ejercicio 7.3 Otra representación del mundo de los bloques se basa en los conceptos primitivos:

- es_bloque(x) se verifica si x es un bloque.
- superior(x) es el bloque que está sobre el bloque x.

Definir los siguientes conceptos:

- sobre_mesa(x) se verifica si el bloque x está sobre la mesa.
- libre(x) se verifica si el bloque x no tiene bloques encima.
- tope(x) es el bloque libre que está encima de x.

Ejercicio 7.4 Formalizar las siguientes expresiones, usando la conceptualización

planeta(x)	x es un planeta
Tierra	la Tierra
Luna	la Luna
satélite(x)	x es un satélite
satélite(x, y)	x es un satélite de y
gira(x, y)	x gira alrededor de y
Sol	el Sol

1. La Tierra es un planeta.
2. La Luna no es un planeta.
3. La Luna es un satélite.
4. La Tierra gira alrededor del Sol.
5. Todo planeta es un satélite.
6. Todo planeta gira alrededor del Sol.
7. Algún planeta gira alrededor de la Luna.
8. Hay por lo menos un satélite.
9. Ningún planeta es un satélite.
10. Ningún objeto celeste gira alrededor de sí mismo.
11. Alrededor de los satélites no giran objetos.
12. Hay exactamente un satélite.
13. La Luna es un satélite de la Tierra.

14. Todo planeta tiene un satélite.
15. La Tierra no tiene satélites.
16. Algún planeta no tiene satélites.
17. Sólo los planetas tienen satélites.
18. Todo satélite es satélite de algún planeta.
19. La Luna no gira alrededor de dos planetas diferentes.
20. Hay exactamente dos planetas.

Ejercicio 7.5 Decidir si las siguientes expresiones son términos en el lenguaje de la aritmética:

1. $+(\cdot(x,1),s(y))$.
2. $+(\cdot(x,<),s(y))$.

Ejercicio 7.6 Decidir si las siguientes expresiones son términos en el lenguaje del mundo de los bloques:

1. superior(superior(c)).
2. libre(superior(c)).

Ejercicio 7.7 Decidir si las siguientes expresiones son fórmulas atómicas en el lenguaje de la aritmética:

1. $< (\cdot(x,1),s(y))$.
2. $+(x,y) = \cdot(x,y)$.

Ejercicio 7.8 Decidir si las siguientes expresiones son fórmulas atómicas en el lenguaje del mundo de los bloques:

1. libre(superior(c)).
2. tope(c) = superior(b).

Ejercicio 7.9 Decidir si las siguientes expresiones son fórmulas en el lenguaje de la aritmética:

1. $\forall x \exists y < (x,y)$
2. $\forall x \exists y + (x,y)$.

Ejercicio 7.10 Decidir si la siguiente expresión es una fórmula en el lenguaje del mundo de los bloques:

1. $\forall x(\text{tope}(x) = x \leftrightarrow \text{libre}(x))$.

Ejercicio 7.11 Dibujar el árbol de análisis de la fórmula $\forall x(R(x,c) \to P(f(y)))$.

Ejercicio 7.12 Calcular las subfórmulas de $\forall x(R(x,c) \to P(f(y)))$.

Ejercicio 7.13 Calcular los conjuntos de variables de las siguientes fórmulas:

1. $\forall x(R(x,c) \to P(f(y)))$.
2. $\forall x(R(a,c) \to P(f(y)))$.

Ejercicio 7.14 Determinar las ocurrencias libres y ligadas de las variables de las siguientes fórmulas:

1. $\forall x(P(x) \to R(x,y)) \to (\exists y P(y) \to R(z,x))$.
2. $\exists x R(x,y) \lor \forall y P(y)$
3. $\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$.
4. $P(x) \to R(x,y)$

Ejercicio 7.15 Calcular el conjunto de variables libres y el conjunto de variables ligadas de cada una de las siguientes fórmulas:

1. $\forall x(P(x) \to R(x,y)) \to (\exists y P(y) \to R(x,z))$.
2. $\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$.
3. $\forall z(P(x) \to R(x,y))$.

Ejercicio 7.16 Determinar si las siguientes fórmulas son abiertas o cerradas:

1. $\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$.
2. $\exists x R(x,y) \lor \forall y P(y)$.

Ejercicio 7.17 Se considera el lenguaje L cuyos símbolos propios son:

- constante: 0;
- símbolo de función monaria: s;
- símbolo de función binaria: $+$ y

- símbolo de relación binaria: $\leq$

y las siguientes estructuras de L

- $\mathcal{I}_1 = (U_1, I_1)$ con
    - $U_1 = \mathbb{N}$
    - $I_1(0) = 0$
    - $I_1(s) = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ (sucesor)
    - $I_1(+) = \{(a, b, a+b) : a, b \in \mathbb{N}\}$ (suma)
    - $I_1(\leq) = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$
- $\mathcal{I}_2 = (U_2, I_2)$ con
    - $U_2 = \{0, 1\}^*$ (cadenas de 0 y 1)
    - $I_2(0) = \epsilon$ (cadena vacía)
    - $I_2(s) = \{(w, w1) : w \in \{0, 1\}^*\}$ (siguiente)
    - $I_2(+) = \{(w_1, w_2, w_1 w_2) : w_1, w_2 \in \{0, 1\}^*\}$ (concatenación)
    - $I_2(\leq) = \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \{0, 1\}^*, w_1$ es prefijo de $w_2\}$ (prefijo)
- $\mathcal{I}_3 = (U_3, I_3)$ con
    - $U_3 = \{abierto, cerrado\}$
    - $I_3(0) = cerrado$
    - $I_3(s) = \{(abierto, cerrado), (cerrado, abierto)\}$

e	$I_3(s)(e)$
abierto	*cerrado*
cerrado	*abierto*

    - $I_3(+) = \{ (abierto, abierto, abierto), (abierto, cerrado, abierto), (cerrado, abierto, abierto), (cerrado, cerrado, cerrado)\}$

$I_3(+)$	*abierto*	*cerrado*
abierto	*abierto*	*abierto*
cerrado	*abierto*	*cerrado*

    - $I_3(\leq) = \{ (abierto, abierto), (cerrado, abierto), (cerrado, cerrado)\}$

$I_3(\leq)$	*abierto*	*cerrado*
abierto	1	0
cerrado	1	1

Calcular el valor del término $s(x + s(0))$ en

1. $\mathcal{I}_1$ con la asignación $A(x) = 3$.

2. $\mathcal{I}_2$ con la asignación $A(x) = 10$.

3. $\mathcal{I}_3$ con la asignación $A(x) = \mathit{abierto}$.

Ejercicio 7.18 Calcular el valor de la fórmula $\forall x \exists y P(x, y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$.

Ejercicio 7.19 Calcular el valor de la fórmula $\forall x g(g(x)) = x$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1, 2\}$ e $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

Ejercicio 7.20 Calcular el valor de las siguientes fórmulas.

1. $\forall x \exists y R(y, x)$ en $\mathcal{I} = (U, I)$ con
   - *a*) $U = \mathbb{Z}$ e $I(R) = <$
   - *b*) $U = \mathbb{N}$ e $I(R) = <$

2. $\exists x \forall y R(x, y)$ en $\mathcal{I} = (U, I)$ con
   - *a*) $U = \mathbb{N}$ e $I(R) = \leq$
   - *b*) $U = \mathbb{N}$ e $I(R) = \geq$

3. $\forall y R(x, y)$ en $\mathcal{I} = (U, I)$ con
   - *a*) $U = \mathbb{N}$, $I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 0$.
   - *b*) $U = \mathbb{N}$, $I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 5$.

Ejercicio 7.21 Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(f) = +$ e $I(g) = *$.

1. Determinar si $(\mathcal{I}, A)$, donde A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = A(y) = 2$, es una realización de $f(x, y) = g(x, y)$.

2. Determinar si $(\mathcal{I}, A)$, donde A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 1$, $A(y) = 2$, es una realización de $f(x, y) = g(x, y)$.

3. Determinar si $\mathcal{I}$ es un modelo de $f(x, y) = g(x, y)$.

4. Determinar si $\mathcal{I}$ es un modelo de $f(x, y) = f(y, x)$.

Ejercicio 7.22 Determinar si las siguientes fórmulas son válidas, satisfacibles o insatisfacibles:

1. $\exists x P(x) \lor \forall x \neg P(x)$.

2. $\exists x P(x) \land \exists x \neg P(x)$.
3. $\forall x P(x) \land \exists x \neg P(x)$.

Ejercicio 7.23 Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. F es válida syss $\neg F$ es insatisfacible.
2. Si F es válida, entonces F es satisfacible.
3. Si F es satisfacible, entonces $\neg F$ es insatisfacible.
4. Sea F una fórmula de L y $x_1, \dots, x_n$ las variables libres de F. Entonces, F es válida syss $\forall x_1 \dots \forall x_n F$ es válida.
5. Sea F una fórmula de L y $x_1, \dots, x_n$ las variables libres de F. Entonces, F es satisfacible syss $\exists x_1 \dots (\exists x_n) F$ es satisfacible.

Ejercicio 7.24 Sea $S = \{\forall y R(x,y),\ \forall y f(x,y) = y\}$. Determinar si $(\mathcal{I}, A)$ es una realización de S

1. $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$.
2. $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = <, f^I = +, A(x) = 0$.

Ejercicio 7.25 Sea $S = \{R(e,y),\ f(e,y) = y\}$. Determinar si $(\mathcal{I}, A)$ es un modelo de S

1. $R^I = \leq, f^I = +, e^I = 0$.
2. $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = <, f^I = +, e^I = 0$.

Ejercicio 7.26 Determinar si los siguientes conjuntos son consistentes:

1. $S = \{\forall y R(x,y),\ \forall y f(x,y) = y\}$.
2. $S = \{P(x) \to Q(x),\ \forall y P(y),\ \neg Q(x)\}$.

Ejercicio 7.27 Decidir si se verifican las siguientes relaciones de consecuencia lógica:

1. $\forall x P(x) \models P(y)$.
2. $P(y) \models \forall x P(x)$.
3. $\{\forall x (P(x) \to Q(x)),\ P(c)\} \models Q(c)$.
4. $\{\forall x (P(x) \to Q(x)),\ Q(c)\} \models P(c)$.
5. $\{\forall x (P(x) \to Q(x)),\ \neg Q(c)\} \models \neg P(c)$.
6. $\{P(c),\ \neg P(d)\} \models c \neq d$.

7.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 7.28 Determinar las variables libres y ligadas de las siguientes fórmulas:

1. $\exists x\, \exists z\, [P(x,y) \rightarrow P(x,z) \wedge \exists x\, (P(y,z) \wedge Q(x,y))]$
2. $\forall x\, \exists z\, [P(x,y) \rightarrow R(x,z) \rightarrow \exists y\, (P(y,z) \vee R(x,y))]$

Ejercicio 7.29 Sea F la fórmula $P(x) \rightarrow P(a)$, donde a es un símbolo de constante. ¿Es F satisfacible? ¿Tiene modelos? ¿Es F una fórmula válida?

Ejercicio 7.30 Sea L un lenguaje de primer orden con dos símbolos de predicado, P (de aridad 1), Q (de aridad 2) y un símbolo de función, f, de aridad 1. Sea $\mathcal{I} = (U, I)$ la estructura dada por:

- $U = \{a, b, c, d\}$;
- $I(P) = \{a, b\}$,
- $I(Q) = \{(a, b),\ (b, b),\ (c, b)\}$,
- $I(f) = \{(a, b), (b, b), (c, a), (d, c)\}$.

Decidir cuáles de las siguientes fórmulas de L son válidas en $\mathcal{I}$:

1. $P(x) \rightarrow \exists y Q(y, x)$.
2. $\forall x Q(f(x), x)$.
3. $Q(f(x), x) \rightarrow Q(x, x)$.
4. $Q(x, y) \rightarrow P(x)$.

Ejercicio 7.31 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de fórmulas son consistentes?

1. $\{Q(x),\ \forall x[Q(x) \rightarrow R(x)],\ \forall x \neg R(x)\}$
2. $\{\forall x P(x, y),\ \forall x \neg P(x, x)\}$
3. $\{\forall x \forall y[P(x, y) \rightarrow P(y, x)],\ \forall x \neg P(x, x),\ \exists y P(x, y)\}$

Ejercicio 7.32 Decidir si son correctas o no las siguientes relaciones de consecuencia:

1. $\{\forall x[P(x) \vee Q(x)]\} \models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
2. $\{\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]\} \models \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
3. $\{\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)\} \models \forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$

4. $\{P(x) \lor Q(f(x))\} \models P(x) \lor Q(x)$

Ejercicio 7.33 En el lenguaje con igualdad $L = \{a, f\}$, siendo f un símbolo de función de aridad 1 y a una constante, se consideran las siguientes fórmulas:

$$F_1 := \forall x[f(x) \neq a],$$

$$F_2 := \forall x \forall y[f(x) = f(y) \to x = y],$$

$$F_3 := \forall x[x \neq a \to \exists y[f(y) = x]].$$

Probar que ninguna de estas fórmulas es consecuencia lógica de las dos restantes.

Ejercicio 7.34 Formalizar las siguientes argumentaciones; es decir, para cada argumentación, determinar la simbolización y formalizarla en lógica de primer orden. Escribir las formalizaciones en APLI2 y demostrar en APLI2 las argumentaciones válidas.

1. Existe una persona en la Feria tal que si dicha persona paga, entonces todas las personas pagan.

2. Sócrates es un hombre. Los hombres son mortales. Luego, Sócrates es mortal.

3. Hay estudiantes inteligentes y hay estudiantes trabajadores. Por tanto, hay estudiantes inteligentes y trabajadores.

4. Todos los participantes son vencedores. Hay como máximo un vencedor. Hay como máximo un participante. Por lo tanto, hay exactamente un participante.

5. Todo aquel que entre en el país y no sea un VIP será cacheado por un aduanero. Hay un contrabandista que entra en el país y que solo podrá ser cacheado por contrabandistas. Ningún contrabandista es un VIP. Por tanto, algún aduanero es contrabandista.

6. Juan teme a María. Pedro es temido por Juan. Luego, alguien teme a María y a Pedro.

7. Los hermanos tienen el mismo padre. Juan es hermano de Luis. Jorge es padre de Luis. Por tanto, Jorge es padre de Juan.

8. La existencia de algún canal de TV pública, supone un acicate para cualquier canal de TV privada; el que un canal de TV tenga un acicate, supone una gran satisfacción para cualquiera de sus directivos; en Madrid hay varios canales públicos de TV; TV5 es un canal de TV privada; por tanto, todos los directivos de TV5 están satisfechos.

9. Quien intente entrar en un país y no tenga pasaporte, encontrará algún aduanero que le impida el paso. A algunas personas motorizadas que intentan entrar en un país le impiden el paso únicamente personas motorizadas. Ninguna persona motorizada tiene pasaporte. Por tanto, ciertos aduaneros están motorizados.

10. Los aficionados al fútbol aplauden a cualquier futbolista extranjero. Juanito no aplaude a futbolistas extranjeros. Por tanto, si hay algún futbolista extranjero nacionalizado español, Juanito no es aficionado al fútbol.

11. Ningún aristócrata debe ser condenado a galeras a menos que sus crímenes sean vergonzosos y lleve una vida licenciosa. En la ciudad hay aristócratas que han cometido crímenes vergonzosos aunque su forma de vida no sea licenciosa. Por tanto, hay algún aristócrata que no está condenado a galeras.

12. Todo individuo que esté conforme con el contenido de cualquier acuerdo internacional lo apoya o se inhibe en absoluto de asuntos políticos. Cualquiera que se inhiba de los asuntos políticos, no participará en el próximo referéndum. Todo español, está conforme con el acuerdo internacional de Maastricht, al que sin embargo no apoya. Por tanto, cualquier individuo o no es español, o en otro caso, está conforme con el contenido del acuerdo internacional de Maastricht y no participará en el próximo referéndum.

13. Toda persona pobre tiene un padre rico. Por tanto, existe una persona rica que tiene un abuelo rico.

14. Todo lo existente tiene una causa. Luego hay una causa de todo lo existente.

15. Todo deprimido que estima a un submarinista es listo. Cualquiera que se estime a sí mismo es listo. Ningún deprimido se estima a sí mismo. Por tanto, ningún deprimido estima a un submarinista.

16. Todos los robots obedecen a los amigos del programador jefe. Alvaro es amigo del programador jefe, pero Benito no le obedece. Por tanto, Benito no es un robot.

17. En una pecera nadan una serie de peces. Se observa que:

    a) Hay algún pez x que para cualquier pez y, si el pez x no se come al pez y entonces existe un pez z tal que z es un tiburón o bien z protege al pez y.

    b) No hay ningún pez que se coma a todos los demás.

    c) Ningún pez protege a ningún otro.

    Por tanto, existe algún tiburón en la pecera.

18. Supongamos conocidos los siguientes hechos acerca del número de aprobados de dos asignaturas A y B:

    a) Si todos los alumnos aprueban la asignatura A, entonces todos aprueban la asignatura B.

    b) Si algún delegado de la clase aprueba A y B, entonces todos los alumnos aprueban A.

    c) Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.

    d) Si Manuel no aprueba B, entonces nadie aprueba B.

    Por tanto, si Manuel es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B.

19. En cierto país oriental se ha celebrado la fase final del campeonato mundial de fútbol. Cierto diario deportivo ha publicado las siguientes estadísticas de tan magno acontecimiento:

    - A todos los porteros que no vistieron camiseta negra les marcó un gol algún delantero europeo.
    - Algún portero jugó con botas blancas y sólo le marcaron goles jugadores con botas blancas.
    - Ningún portero se marcó un gol a sí mismo.
    - Ningún jugador con botas blancas vistió camiseta negra.

    Por tanto, algún delantero europeo jugó con botas blancas.

20. Las relaciones de parentesco verifican la siguientes propiedades generales:

    - Si x es hermano de y, entonces y es hermano de x.
    - Todo el mundo es hijo de alguien.
    - Nadie es hijo del hermano de su padre.
    - Cualquier padre de una persona es también padre de todos los hermanos de esa persona.
    - Nadie es hijo ni hermano de sí mismo.

    Tenemos los siguientes miembros de la familia Peláez: Don Antonio, Don Luis, Antoñito y Manolito y sabemos que Don Antonio y Don Luis son hermanos, Antoñito y Manolito son hermanos, y Antoñito es hijo de Don Antonio. Por tanto, Don Luis no es el padre de Manolito.

21. Si uno de los miembros del club afeita a algún otro (incluido a sí mismo), entonces todos los miembros del club lo han afeitado a él (aunque no necesariamente al mismo tiempo). Guido, Lorenzo, Petruccio y Cesare pertenecen al club de barberos. Guido ha afeitado a Cesare. Por tanto, Petruccio ha afeitado a Lorenzo.

22. Carlos afeita a todos los habitantes de Las Chinas que no se afeitan a sí mismo y sólo a ellos. Carlos es un habitante de las Chinas. Por consiguiente, Carlos no afeita a nadie.

23. Quien desprecia a todos los fanáticos desprecia también a todos los políticos. Alguien no desprecia a un determinado político. Por consiguiente, hay un fanático al que no todo el mundo desprecia.

24. Sólo hay un sofista que enseña gratuitamente, y éste es Sócrates. Sócrates argumenta mejor que ningún otro sofista. Platón argumenta mejor que algún sofista que enseña gratuitamente. Si una persona argumenta mejor que otra segunda, entonces la segunda no argumenta mejor que la primera. Por consiguiente, Platón no es un sofista.

25. Todos los filósofos se han preguntado qué es la filosofía. Los que se preguntan qué es la filosofía se vuelven locos. Nietzsche es filósofo. El maestro de Nietzsche no acabó loco. Por tanto, Nietzsche y su maestro son diferentes personas.

26. El hombre puro ama todo lo que es puro. Por tanto, el hombre puro se ama a sí mismo.

27. Ningún socio del club está en deuda con el tesorero del club. Si un socio del club no paga su cuota está en deuda con el tesorero del club. Por tanto, si el tesorero del club es socio del club, entonces paga su cuota.

28. Los caballos son animales. Por tanto, las colas de caballo son colas de animales.

29. Los padres son mayores que los hijos. Juan es el padre de Luis. Por tanto, Juan es mayor que Luis.

30. El esposo de la hermana de Toni es Roberto. La hermana de Toni es María. Por tanto, el esposo de María es Roberto.

31. Juan y Jaime tienen el mismo padre. La madre de María es Mónica. Mónica ama a Pedro. Pedro es el padre de Jaime. Por tanto, la madre de María ama al padre de Juan.

32. Si dos personas son hermanos, entonces tienen la misma madre y el mismo padre. Juan es hermano de Luis. Por tanto, la madre del padre de Juan es la madre del padre de Luis.

33. Todos los miembros del claustro son asturianos. El secretario forma parte del claustro. El señor Martínez es el secretario. Por tanto, el señor Martínez es asturiano.

34. Eduardo pudo haber visto al asesino. Antonio fue el primer testigo de la defensa. O Eduardo estaba en clase o Antonio dio falso testimonio. Nadie en clase pudo haber visto al asesino. Luego, el primer testigo de la defensa dio falso testimonio.

35. La luna hoy es redonda. La luna de hace dos semanas tenía forma de cuarto creciente. Luna no hay más que una, es decir, siempre es la misma. Luego existe algo que es a la vez redondo y con forma de cuarto creciente.

36. Juana sólo tiene un marido. Juana está casada con Tomás. Tomás es delgado y Guillermo no. Luego, Juana no está casada con Guillermo.

37. Sultán no es Chitón. Sultán no obtendrá un plátano a menos que pueda resolver cualquier problema. Si el chimpancé Chitón trabaja más que Sultán resolverá problemas que Sultán no puede resolver. Todos los chimpancés distintos de Sultán trabajan más que Sultán. Por consiguiente, Sultán no obtendrá un plátano.

38. Rosa ama a Curro. Paco no simpatiza con Ana. Quien no simpatiza con Ana ama a Rosa. Si una persona ama a otra, la segunda ama a la primera. Hay como máximo una persona que ama a Rosa. Por tanto, Paco es Curro.

39. Soy hijo único. El padre de Gutiérrez es el hijo de mi padre. Luego, yo soy el padre de Gutiérrez.

40. La sal y el azúcar son blancos. La sal no es azúcar. Por tanto, nada es blanco.

41. Quien mucho abarca poco aprieta. Sólo será líder quien aprieta poco. Juan abarca mucho porque ha estudiado cuatro carreras. El mayor de los hermanos es un líder. Luego, Juan no es el mayor de los hermanos.

42. Nadie sino Enrique y el cajero tenía una llave. Alguien que tenía una llave cogió la maleta. Por tanto, Enrique o el cajero tomaron la maleta.

43. El gestor que contrató a Juan sólo contrata licenciados con sobresaliente. Por tanto, Juan era un licenciado con sobresaliente.

44. Sócrates era el maestro de Platón. Sócrates tuvo, a lo sumo, un discípulo. Aristóteles fue discípulo de alguien cuyo maestro fue Sócrates. Por consiguiente, Platón fue el maestro de Aristóteles.

45. Nadie tiene más de un discípulo. Un autodidacta es aquel que ha sido maestro de sí mismo. Platón fue discípulo de un autodidacta. Por tanto, Platón fue un autodidacta.

46. Todos tiene exactamente un padre. Luego, todos tienen exactamente un abuelo paterno.

47. Todos tiene exactamente dos progenitores. Por tanto, todos tienen exactamente cuatro abuelos.

48. Si dos personas x e y son amigas, entonces x es amiga de la pareja de y. La pareja de Juan es amiga de Eva. Si x es amiga de y, entonces y es amiga de x. La pareja de la pareja de x es x. Por tanto, Juan es amigo de Eva.

49. Alguien que vive en la casa del crimen ha asesinado a la tía Ágata. Ágata, el mayordomo y Carlos viven en la casa del crimen y son las únicas personas que viven en la casa del crimen. Un asesino siempre odia a sus víctimas, y nunca es más rico que su víctima. Carlos no odia a nadie de los que odia la tía Ágata. Ágata odia a todos excepto al mayordomo. El mayordomo odia a los que no son más rico que la tía Ágata. El mayordomo odia a todos los que odia la tía Ágata. Nadie odia a todos. Por tanto, Ágata se ha suicidado.

50. (*Schubert's Steamroller*) Los lobos, zorros, pájaros, orugas y caracoles son animales y existen algunos ejemplares de estos animales. También hay algunas semillas y las semillas son plantas. A todo animal le gusta o bien comer todo tipo de plantas o bien le gusta comerse a todos los animales más pequeños que él mismo que gustan de comer algunas plantas. Las orugas y los caracoles son mucho más pequeños que los pájaros, que son mucho más pequeños que los zorros que a su vez son mucho más pequeños que los lobos. A los lobos no les gusta comer ni zorros ni semillas, mientras que a los pájaros les gusta comer orugas pero no caracoles. Las orugas y los caracoles gustan de comer algunas plantas. Luego, existe un animal al que le gusta comerse un animal al que le gusta comer semillas.

7.3. Ejercicios de exámenes

Ejercicio 7.35 [Examen de Junio de 2002] Se considera el lenguaje de primer orden $L = \{P, f\}$ y las fórmulas de L: $F_1 : \forall x \exists y P(x, f(y))$, $F_2 : \exists y \forall x P(x, f(y))$ y $F_3 : \exists y \forall x P(x, y)$.

1. Hallar una L estructura, $\mathcal{I}$, tal que $\mathcal{I} \models F_1$ pero $\mathcal{I} \not\models F_2$.

2. Hallar una L estructura, $\mathcal{I}'$, tal que $\mathcal{I}' \models F_3$ pero $\mathcal{I}' \not\models F_2$.

Ejercicio 7.36 [Examen de Diciembre de 2003] Se considera el lenguaje de primer orden $L = \{a, f, P, Q, R\}$ y el conjunto de fórmulas de L

$$
\begin{aligned}
S = \{ & \forall x[Q(x) \rightarrow R(x)], \\
& \forall x \forall y[P(x,y) \rightarrow P(y,x)], \\
& \forall x \neg P(x,x), \\
& \forall x[P(f(x),x) \rightarrow Q(f(x))], \\
& \forall x[R(x) \leftrightarrow P(x,f(x))], \\
& Q(f(a))\}
\end{aligned}
$$

Construir razonadamente un modelo $\mathcal{I}$ de S cuyo universo sea $U = \{1,2,3,4,5\}$.

Ejercicio 7.37 [Examen de Junio de 2004] Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado, Q (de aridad 2) y un símbolo de función, f (de aridad 1). Se considera la estructura $\mathcal{I}$ dada por: Universo: $\{a,b\}$, $Q^I = \{(a,b), (b,a)\}$, $f^I(a) = a$ y $f^I(b) = a$. Decidir cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen en la estructura:

1. $\forall x[Q(f(x),x) \rightarrow Q(x,x)]$
2. $\exists x[Q(f(x),x) \rightarrow Q(x,x)]$

Ejercicio 7.38 [Examen de Septiembre de 2004] Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado P de aridad 2.

1. Probar que las fórmulas $\forall x \exists y P(x,y)$ y $\exists x \forall y P(x,y)$ no son equivalentes, dando una estructura que sea modelo de la primera pero no de la segunda.
2. En la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ cuyo universo es $U = \{a,b,c\}$ y $P^I = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}$, ¿cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen y cuáles no?
   a) $\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$
   b) $\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall x \exists y P(x,y)$
   c) $\neg[\forall x \exists y P(x,y) \land \exists x \forall y P(x,y)]$

Ejercicio 7.39 [Examen de Septiembre de 2006] Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Para toda fórmula F, toda subfórmula G de F y toda variable libre x de G, se tiene que x es una variable libre de F.
2. Para toda fórmula F y toda fórmula G, se tiene $\exists x[F \land G] \equiv \exists x F \land \exists x G$.
3. Para ninguna fórmula F y ninguna fórmula G, se tiene $\exists x[F \land G] \equiv \exists x F \land \exists x G$.

Tema 8

Deducción natural de primer orden

8.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 8.1 Sea σ la sustitución $[x/f(y,a), y/z]$. Calcular

1. $a\sigma$.
2. $w\sigma$.
3. $h(a,x,w)\sigma$.
4. $f(x,y)\sigma$.
5. $h(a,f(x,y),w)\sigma$.

Ejercicio 8.2 Sea σ la sustitución $[x/f(y), y/b]$. Calcular

1. $(\forall x\ (Q(x) \to R(x,y)))\sigma$.
2. $(Q(x) \to \forall x\ R(x,y))\sigma$.
3. $(\forall x\ (Q(x) \to \forall y\ R(x,y)))\sigma$.

Ejercicio 8.3 Decidir si la sustitución σ es libre para la fórmula F en cada uno de los siguientes casos:

1. σ es $[y/x]$ y F es $\exists x\ (x < y)$.
2. σ es $[y/g(y)]$ y F es $\forall x\ (P(x) \to Q(x,f(y)))$.
3. σ es $[y/g(x)]$ y F es $\forall x\ (P(x) \to Q(x,f(y)))$.

Ejercicio 8.4 Demostrar mediante deducción natural

1. $P(c)$,
   $\forall x[P(x) \to \neg Q(x)]$
   $\vdash \neg Q(c)$

2. $\forall x[P(x) \to \neg Q(x)]$,
   $\forall x P(x)$
   $\vdash \forall x \neg Q(x)$

3. $\forall x P(x)$
   $\vdash \exists x P(x)$

4. $\forall x[P(x) \to Q(x)]$,
   $\exists x P(x)$
   $\vdash \exists x Q(x)$

5. $\forall x[Q(x) \to R(x)]$,
   $\exists x[P(x) \land Q(x)]$
   $\vdash \exists x[P(x) \land R(x)]$

6. $\exists x P(x)$,
   $\forall x \forall y[P(x) \to Q(y)]$
   $\vdash \forall y Q(y)$

7. $\vdash \neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$

8. $\vdash \forall x[P(x) \land Q(x)] \leftrightarrow \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$

9. $\vdash \exists x P(x) \lor \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x[P(x) \lor Q(x)]$

10. $\vdash \exists x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x, y)$

8.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 8.5 Demostrar mediante deducción natural

1. $\forall x[P(x) \to Q(x)]$
   $\vdash \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

2. $\exists x \neg P(x)$
   $\vdash \neg \forall x P(x)$

3. $\forall x P(x)$
   $\vdash \forall y P(y)$

4. $\forall x[P(x) \to Q(x)]$
   $\vdash \forall x \neg Q(x) \to \forall x \neg P(x)$

5. $\forall x[P(x) \to \neg Q(x)]$
   $\vdash \neg \exists x[P(x) \land Q(x)]$

6. $\forall x \forall y P(x,y)$
   $\vdash \forall u \forall v P(u,v)$

7. $\exists x \exists y P(x,y)$
   $\vdash \exists u \exists v P(u,v)$

8. $\exists x \forall y P(x,y)$
   $\vdash \forall y \exists x P(x,y)$

9. $\exists x[P(a) \to Q(x)]$
   $\vdash P(a) \to \exists x Q(x)$

10. $P(a) \to \exists x Q(x),$
    $\vdash \exists x[P(a) \to Q(x)]$

11. $\exists x P(x) \to Q(a)$
    $\vdash \forall x[P(x) \to Q(a)]$

12. $\forall x[P(x) \to Q(a)],$
    $\vdash \exists x[P(x) \to Q(a)]$

13. $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$
    $\vdash \forall x[P(x) \lor Q(x)]$

14. $\exists x[P(x) \land Q(x)]$
    $\vdash \exists x P(x) \land \exists x Q(x)$

15. $\forall x \forall y[P(y) \to Q(x)]$
    $\vdash \exists y P(y) \to \forall x Q(x)$

16. $\neg \forall x \neg P(x),$
    $\vdash \exists x P(x)$

17. $\forall x \neg P(x)$
    $\vdash \neg \exists x P(x)$

18. $\exists x P(x)$
    $\vdash \neg \forall x \neg P(x)$

19. $P(a) \to \forall x Q(x)$
 $\vdash \forall x[P(a) \to Q(x)]$

20. $\forall x \forall y \forall z[R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)]$,
 $\forall x \neg R(x,x)$
 $\vdash \forall x \forall y[R(x,y) \to \neg R(y,x)]$

21. $\forall x[P(x) \lor Q(x)]$,
 $\exists x \neg Q(x)$,
 $\forall x[R(x) \to \neg P(x)]$
 $\vdash \exists x \neg R(x)$

22. $\forall x[P(x) \to (Q(x) \lor R(x))]$,
 $\neg \exists x[P(x) \land R(x)]$
 $\vdash \forall x[P(x) \to Q(x)]$

23. $\exists x \exists y[R(x,y) \lor R(y,x)]$
 $\vdash \exists x \exists y R(x,y)$

Ejercicio 8.6 Demostrar mediante deducción natural

1. $t_1 = t_2$,
 $t_2 = t_3$
 $\vdash t_1 = t_3$

2. $t_1 = t_2$
 $\vdash t_2 = t_1$

3. $P(a)$
 $\vdash \forall x((x = a) \to P(x))$

4. $\exists x \exists y(R(x,y) \lor R(y,x))$
 $\neg \exists x R(x,x)$
 $\vdash \exists x \exists y \neg(x = y)$

5. $\forall x P(a,x,x)$,
 $\forall x \forall y \forall z(P(x,y,z) \to P(f(x),y,f(z))$
 $\vdash P(f(a),a,f(a)$

6. $\forall x P(a,x,x)$,
 $\forall x \forall y \forall z(P(x,y,z) \to P(f(x),y,f(z))$
 $\vdash \exists z P(f(a),z,f(f(a)))$

7. $\forall y Q(a,y)$,
   $\forall x \forall y (Q(x,y) \to Q(s(x),s(y))$
   $\vdash \exists z (Q(a,z) \land Q(z,s(s(a))))$

Ejercicio 8.7 Demostrar por deducción natural cada una de las argumentaciones válidas del ejercicio 7.34.

8.3. Ejercicios de exámenes

Ejercicio 8.8 Demostrar mediante deducción natural

1. $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$
   $\vdash \forall x [P(x) \lor Q(x)]$

2. $\exists x [P(x) \land Q(x)]$
   $\vdash \exists x P(x) \land \exists x Q(x)$

3. $\forall x [R(x) \to Q(x)]$,
   $\exists x [P(x) \land \neg Q(x)]$
   $\vdash \exists x [P(x) \land \neg R(x)]$

4. $\exists x [P(x) \land Q(x)]$,
   $\forall y [P(y) \to R(y)]$
   $\vdash \exists x [R(x) \land Q(x)]$

5. $\forall x R(x,x)$,
   $\forall x \forall y \forall z [\neg R(x,y) \land \neg R(y,z) \to \neg R(x,z)]$
   $\vdash \forall x \forall y [R(x,y) \lor R(y,x)]$

6. $\exists x \exists y [R(x,y) \lor R(y,x)]$
   $\vdash \exists x \exists y R(x,y)$

7. $\forall x [P(x) \to \exists y Q(y)]$,
   $\vdash \forall x \exists y [P(x) \to Q(y)]$

8. $\forall x [P(x) \to \neg C(x)]$,
   $\exists x [C(x) \land B(x)]$
   $\vdash \exists x [B(x) \land \neg P(x)]$

9. $\forall x \exists y [P(x) \to Q(y)]$
   $\vdash \forall x [P(x) \to \exists y Q(y)]$

10. $\neg \forall x [P(x) \to Q(a)]$
    $\vdash \exists x P(x) \land \neg Q(a)$

11. $\forall x P(x)$,
$\forall x[P(x) \to Q(x) \lor R(x)]$,
$\exists x \neg Q(x)$
$\vdash \exists x R(x)$

12. $\forall x \forall y[R(x,y) \to R(y,x)]$,
$\forall x \forall y[R(x,y) \lor R(y,x)]$
$\vdash \forall x \forall y \forall z[\neg R(x,y) \land \neg R(y,z) \to \neg R(x,z)]$

13. $\neg \forall x P(x)$
$\vdash \exists x \neg P(x)$

14. $\forall x \forall y[(\exists z R(y,z)) \to R(x,y)]$,
$\exists x \exists y R(x,y)$
$\vdash \forall x \forall y R(x,y)$

15. $\exists x[P(x) \land \neg Q(x)] \to \forall y[P(y) \to R(y)]$,
$\exists x[P(x) \land S(x)]$,
$\forall x[P(x) \to \neg R(x)]$
$\vdash \exists x[S(x) \land Q(x)]$

16. $\vdash \neg \exists x \forall y[P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y)]$

17. $\forall x[\exists y R(x,y) \to \exists y[\forall z R(y,z) \land R(x,y)]]$,
$\exists x \exists y R(x,y)$
$\vdash \exists x \forall y R(x,y)$

18. $\forall x[P(x) \to \forall y[Q(y) \to R(x,y)]]$,
$\exists x[P(x) \land \exists y \neg R(x,y)]$
$\vdash \neg \forall x Q(x)$

19. $\exists x[P(x) \to \forall y Q(y)]$
$\vdash \exists x \forall y[P(x) \to Q(y)]$

20. $\exists y \exists z[\forall x \neg R(x,y) \lor \forall x \neg R(x,z)]$
$\vdash \neg \forall y \forall z \exists x[R(x,y) \land R(x,z)]$

21. $\exists x[P(x) \to \forall y[P(y) \to Q(y)]]$,
$\neg \exists x Q(x)$
$\vdash \neg \forall x P(x)$

22. $\neg \exists x[P(x) \land \neg \forall y[Q(y) \to R(x,y)]]$,
$\exists x[P(x) \land \exists y \neg R(x,y)]$
$\vdash \exists x \neg Q(x)$

23. $\forall x \forall y[\exists z[R(z,y) \land \neg R(x,z)] \rightarrow R(x,y)]$,
$\neg \exists x R(x,x)$
$\vdash \forall x \forall y[\neg R(y,x) \rightarrow \neg R(x,y)]$

24. $P(a) \rightarrow \neg \forall x \neg R(x)$,
$\vdash \neg \forall x[\neg R(x) \land P(a)]$

25. $\forall x \forall y \forall z[P(x,y) \land P(y,z) \rightarrow R(x,z)]$,
$\forall x \exists y P(x,y)$
$\vdash \forall x \exists y R(x,y)$

26. $\forall x[P(x) \rightarrow (\exists y Q(x,y) \rightarrow \exists y Q(y,x))]$,
$\forall x[\exists y Q(y,x) \rightarrow Q(x,x)]$,
$\neg \exists x Q(x,x)$
$\vdash \forall x[P(x) \rightarrow \forall y \neg Q(x,y)]$

27. $\forall x[Q(x) \rightarrow \neg R(x)]$,
$\forall x[P(x) \rightarrow Q(x) \lor S(x)]$,
$\exists x[P(x) \land R(x)]$
$\vdash \exists x[P(x) \land S(x)]$

28. $\forall x[P(x) \rightarrow (R(x) \rightarrow S(x))]$,
$\exists x[P(x) \lor \neg R(x)]$
$\vdash \exists x[R(x) \rightarrow S(x)]$

Ejercicio 8.9 [Examen de Junio 2005] Se sabe que:

- Si todo el que estudia aprueba, entonces todo el que estudia recibe un regalo.
- Hay quien estudia y no recibe ningún regalo.
- No es verdad que todo el que estudia aprueba.

Formalizar los conocimientos anteriores y probar que el conjunto de fórmulas obtenidas es consistente, proporcionando una estructura que sea modelo de cada una de las fórmulas.

Tema 9

Tableros semánticos

9.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 9.1 Demostrar mediante tableros semánticos

1. $\{\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x P(x)\} \vdash_{Tab} \exists x Q(x)$
2. $\{\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)], \forall x[Q(x) \rightarrow R(x)]\} \vdash_{Tab} \forall x[P(x) \rightarrow R(x)]$

Ejercicio 9.2 Refutar mediante tablero semántico

$\forall x[P(x) \lor Q(x)] \not\models \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$

y construir un contramodelo a partir del tablero.

9.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 9.3 Decidir, mediante tableros semánticos, si los siguientes conjuntos son consistentes:

1. $\{\exists x Q(x),\ \forall x(Q(x) \rightarrow R(x)), \forall x \neg R(x)\}$
2. $\{P(0), \forall x(P(x) \rightarrow P(f(x)))\}$
3. $\{\forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow P(y,x)), \forall x \neg P(x,x), \exists x \exists y P(x,y)\}$
4. $\{\exists x Q(x), \forall x P(x, f(x)), \forall x \neg P(x,x)\}$
5. $\{\exists y \forall x P(x,y), \forall x \neg P(x,x)\}$
6. $\{\forall x \exists y P(x,y), \forall x \neg P(x,x)\}$

Ejercicio 9.4 Decidir, mediante tableros semánticos, si se verifican las siguientes relaciones de consecuencia:

1. $\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall y(Q(y) \lor R(y) \to S(a))\} \models \forall x(P(x) \to S(a))$
2. $\{\forall x(P(x) \to Q(x))\} \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$
3. $\{\forall x P(x) \to \forall x Q(x)\} \models \forall x(P(x) \to Q(x))$
4. $\{\neg\forall x(P(x) \land Q(x))\} \models \exists x \neg P(x) \land \exists x \neg Q(x)$
5. $\{\forall x(P(x) \lor Q(f(x)))\} \models \forall x(P(x) \lor Q(x))$

Ejercicio 9.5 Probar mediante tableros semánticos:

1. $\forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$
2. $\forall x(P(x) \lor Q(x)) \not\equiv \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$
3. $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \equiv \exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$
4. $\exists x(P(x) \land Q(x)) \not\equiv \exists x P(x) \land \exists x Q(x)$

Ejercicio 9.6 Determinar, mediante tableros semánticos, cuáles de las siguientes fórmulas son lógicamente válidas y cuáles insatisfactibles.

1. $\forall x \forall y(P(x) \lor Q(y)) \lor \exists x \exists y(\neg P(x) \land \neg Q(y))$
2. $\exists x \exists y P(x, y) \lor \neg\exists x P(x, x)$
3. $\forall x P(x, x) \to \exists x \forall y(P(x, y) \to P(y, x))$
4. $\exists x \forall y(P(x, y) \leftrightarrow \neg P(y, y))$
5. $\neg\exists x \exists y P(x, y) \lor \exists x P(x, x)$
6. $\forall x \forall y(P(x, y) \lor \neg P(y, x))$
7. $\forall x P(x, x) \to \forall x \exists y(P(x, y) \to P(y, x))$
8. $\exists x \forall y(P(x, y) \leftrightarrow \neg\exists z(P(y, z) \land P(z, y)))$

Ejercicio 9.7 Determinar mediante tableros si son ciertas las siguientes afirmaciones:

1. $\models \exists x P(x) \to P(a)$,
2. $\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall y(Q(a) \lor R(y) \to S(a))\} \models \forall x(P(x) \to S(a))$.

Ejercicio 9.8 Resolver, mediante tableros semánticos, los ejercicios del tema 7.

9.3. Ejercicios de exámenes

Ejercicio 9.9 [Segundo parcial de 2005] Decidir, mediante tableros semánticos, si

1. $\neg\exists x P(x) \vdash \forall y[(\exists z P(z)) \to P(y)]$.
2. $\{\exists x P(x) \to \forall x Q(x)\} \vdash \forall x[P(x) \to Q(x)]$.

Ejercicio 9.10 [Tercer parcial de 2010] Decidir, mediante tableros semánticos, si

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

Ejercicio 9.11 [Cuarto parcial de 2010] Decidir, mediante tableros semánticos, si

$$\models \forall x(P(x) \to R(x,x)) \to \forall x \exists y(R(x,y) \lor \neg P(y))$$

Ejercicio 9.12 [Examen de junio de 2010] Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula $\forall x \exists y(R(x,y) \lor \neg P(y))$ se deduce de la fórmula $\forall x(P(x) \to R(x,x))$.

Ejercicio 9.13 [Tercer parcial de 2011] Demostrar o refutar mediante tableros semánticos

$$\models \forall x(P(x) \to R(x,x)) \to \forall x \exists y(R(x,y) \lor \neg P(y))$$

Ejercicio 9.14 [Examen de junio de 2011] Demostrar o refutar mediate tableros semánticos

$$\forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x)) \models \forall x \forall y \forall z(R(x,y) \land R(x,z) \to \exists u(R(y,u) \land R(z,u)))$$

y en el caso de que no lo sea, encontrar un contramodelo.

Tema 10

Formas normales. Cláusulas

10.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 10.1 Decidir si las siguientes fórmulas están en forma rectificada.

1. $\forall x\ P(x) \to \forall y\ Q(z,y)$.
2. $\forall x\ P(x) \to \forall y\ Q(x,y)$.
3. $\forall x\ P(x) \to \forall x\ Q(z,x)$.

Ejercicio 10.2 Calcular una fórmula equivalente en forma rectificada para cada una de las siguientes fórmulas:

1. $\forall x\ P(x) \to \forall x\ Q(z,x)$.
2. $\forall x\ P(x) \to \forall y\ Q(x,y)$.

Ejercicio 10.3 Determinar cuáles de las siguientes fórmulas están en forma normal prenexa:

1. $\neg \exists x\ [P(x) \to \forall x\ P(x)]$
2. $\forall x\ \exists y\ [P(x) \wedge \neg P(y)]$
3. $\forall x\ P(x) \vee \exists y\ Q(y)$
4. $\forall x\ \exists y\ [P(x) \vee Q(y)]$
5. $\exists y\ \forall x\ [P(x) \vee Q(y)]$
6. $\neg(\forall x\ [P(x) \to Q(x)] \wedge \forall x\ [Q(x) \to R(x)] \to \forall x\ [P(x) \to R(x)])$
7. $\exists z\ \forall x\ \forall y\ [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge P(z)]$

Ejercicio 10.4 Calcular una forma normal prenexa de cada una de las siguientes fórmulas:

1. $\neg\exists x\ [P(x) \to \forall x\ P(x)]$.
2. $\forall x\ P(x) \lor \exists y\ Q(y)$.
3. $\forall x\ P(x) \lor \exists y\ Q(y)$.
4. $\neg(\forall x\ [P(x) \to Q(x)] \land \forall x\ [Q(x) \to R(x)] \to \forall x\ [P(x) \to R(x)])$.

Ejercicio 10.5 Calcular una forma normal prenexa conjuntiva de la fórmula

$\forall x\ \exists y\ [P(x) \lor (Q(y) \land \neg R(y))]$.

Ejercicio 10.6 Decidir si los siguientes pares de fórmulas son equisatisfacibles y equivalentes:

1. $\exists x\ Q(x)$ y $Q(a)$.
2. $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ y $\forall x\ P(x, f(x))$.

Ejercicio 10.7 Calcular una forma de Skolem de cada una de las siguientes fórmulas:

1. $\exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w\ P(x,y,z,u,v,w))$.
2. $\forall x\ \exists y\ \forall z\ \exists w\ [\neg P(a,w) \lor Q(f(x),y)]$.
3. $\neg\exists x\ [P(x) \to \forall x\ P(x)]$.
4. $\forall x\ P(x) \lor \exists y\ Q(y)$.
5. $\forall x\ P(x) \lor \exists y\ Q(y)$.
6. $\neg(\forall x\ [P(x) \to Q(x)] \land \forall x\ [Q(x) \to R(x)] \to \forall x\ [P(x) \to R(x)])$.

Ejercicio 10.8 Calcular una forma clausal de cada una de las siguientes fórmulas:

1. $\neg\exists x\ [P(x) \to \forall x\ P(x)]$.
2. $\forall x\ P(x) \lor \exists y\ Q(y)$.
3. $\forall x\ P(x) \lor \exists y\ Q(y)$.
4. $\neg(\forall x\ [P(x) \to Q(x)]$.
5. $\neg(\forall x\ [P(x) \to Q(x)] \land \exists x\ P(x) \to \exists x\ Q(x))$.

Ejercicio 10.9 Calcular una forma clausal del conjunto de fórmulas

$$\{\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)],\ \exists x\ P(x),\ \neg\exists x\ Q(x)\}.$$

Ejercicio 10.10 Reducir cada uno de los siguientes problemas a un problema de inconsistencia de conjuntos de cláusulas.

1. $\{\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)],\ \exists x\ P(x)\} \models \exists x\ Q(x)$

2. $\{\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)],\ \forall x\ [Q(x) \rightarrow R(x)]\} \models \forall x\ [P(x) \rightarrow R(x)]$

!

Tema 11

Modelos de Herbrand

11.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 11.1 Decidir si el conjunto $\{P(a) \lor P(b), \neg P(b) \lor P(c), P(a) \to P(c), \neg P(c)\}$ es consistente y, en el caso de que lo sea, calcular todos sus modelos.

Ejercicio 11.2 Calcular el universo de Herbrand de los lenguajes cuyos conjuntos de constantes, $\mathcal{C}$, y símbolos de funciones, $\mathcal{F}$ son:

1. $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{F} = \emptyset$.

2. $\mathcal{C} = \emptyset$ y $\mathcal{F} = \{f/1\}$.

3. $\mathcal{C} = \{a, b\}$ y $\mathcal{F} = \{f/1, g/1\}$.

4. $\mathcal{C} = \{a, b\}$ y $\mathcal{F} = \{f/2\}$.

Ejercicio 11.3 Calcular la base de Herbrand de los lenguajes cuyos conjuntos de constantes, $\mathcal{C}$, símbolos de funciones, $\mathcal{F}$ y símbolos de relaciones, $\mathcal{R}$, son:

1. $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$ y $\mathcal{R} = \{P/1\}$.

2. Si $\mathcal{C} = \{a\}$, $\mathcal{F} = \{f/1\}$ y $\mathcal{R} = \{P/1, Q/1, R/1\}$.

Ejercicio 11.4 Sea $S = \{P(a) \lor P(b), \neg P(b) \lor P(c), P(a) \to P(c), \neg P(c)\}$. Calcular:

1. el universo de Herbrand de S,

2. la base de Herbrand de S y

3. los modelos de Herbrand de S.

Ejercicio 11.5 Sea $S = \{\forall x\ \forall y\ [Q(b, x) \to P(a) \lor R(y)], P(b) \to \neg \exists z\ \exists u\ Q(z, u)\}$. Calcular:

1. el universo de Herbrand de S,
2. la base de Herbrand de S y
3. un modelo de Herbrand de S.

Ejercicio 11.6 Sea S el conjunto de cláusulas $\{\{\neg Q(b,x), P(a), R(y)\}, \{\neg P(b), \neg Q(z,u)\}\}$ e $\mathcal{I} = (U, I)$ la estructura con universo $U = \{1,2\}$ e interpretación I definida por $a^I = 1$, $b^I = 2$, $P^I = \{1\}$, $Q^I = \{(1,1),(2,2)\}$ y $R^I = \{2\}$.

1. Comprobar que $\mathcal{I} \models S$.
2. Calcular la interpretación de Herbrand $\mathcal{I}^*$ correspondiente a $\mathcal{I}$.
3. Comprobar que $\mathcal{I}^* \models S$.

Ejercicio 11.7 Sea S el conjunto de cláusulas $\{\{P(a)\}, \{Q(y, f(a))\}\}$ e $\mathcal{I} = (U, I)$ la estructura con universo $U = \{1,2\}$ e interpretación I definida por $a^I = 1$, $f^I = \{(1,2),(2,1)\}$, $P^I = \{1\}$ y $Q^I = \{(1,2),(2,2)\}$.

1. Comprobar que $\mathcal{I} \models S$.
2. Calcular la interpretación de Herbrand $\mathcal{I}^*$ correspondiente a $\mathcal{I}$.
3. Comprobar que $\mathcal{I}^* \models S$.

Ejercicio 11.8 Sea $S = \{\exists x\ P(x), \neg P(a)\}$.

1. Comprobar que S es consistente.
2. Comprobar que S no tiene modelo de Herbrand.
3. Calcular un conjunto de cláusulas S' equisatisfacible con S (es decir, una forma clausal de S).
4. Calcular un modelo de Herbrand de S'.

Ejercicio 11.9 Sea C la cláusula $\{P(x,a), \neg P(x, f(y))\}$ y σ la sustitución $[x/a, y/f(a)]$. Calcular la instancia $C\sigma$ de C.

Ejercicio 11.10 Sea C la cláusula $\{P(x,a), \neg P(x, f(y))\}$. Decidir si las siguientes cláusulas son instancias básicas de C:

1. $\{P(f(a),a), \neg P(f(a), f(f(a)))\}$.
2. $\{P(f(a),a), \neg P(f(f(a)), f(a))\}$.

3. $\{P(x,a), \neg P(f(f(a)), f(a))\}$.

Ejercicio 11.11 Calcular la extensión de Herbrand de cada uno de los siguientes conjuntos de cláusulas:

1. $S_1 = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$.
2. $S_2 = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$.
3. $S_3 = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$.

Ejercicio 11.12 Mediante el procedimiento de semidecisión basado en el teorema de Herbrand, decidir la inconsistencia de los siguientes conjuntos de cláusulas:

1. $S_1 = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$.
2. $S_2 = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$.
3. $S_3 = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$.

Ejercicio 11.13 Sea S el conjunto de cláusulas $\{\{\neg P(x), Q(f(x), x)\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(y,z)\}\}$. Calcular un subconjunto finito de la extensión de Herbrand de S que sea inconsistente.

!

Tema 12

Cláusulas. Modelos de Herbrand. Resolución

12.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 12.1 Demostrar por resolución

1. $\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \exists x\ P(x)\} \vdash \exists x\ Q(x)$
2. $\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \forall x\ [Q(x) \to R(x)]\} \vdash \forall x\ [P(x) \to R(x)]$

Ejercicio 12.2 Decidir si la sustitución σ es un unificador de los términos t_1 y t_2 en cada uno de los siguientes casos, calculando una instancia común:

	t_1	t_2	σ
1	$f(x,g(z))$	$f(g(y),x)$	$[x/g(z),y/z]$
2	$f(x,g(z))$	$f(g(y),x)$	$[x/g(y),z/y]$
3	$f(x,g(z))$	$f(g(y),x)$	$[x/g(a),y/a]$
4	$f(x,y)$	$f(y,x)$	$[x/a,y/a]$
5	$f(x,y)$	$f(y,x)$	$[y/x]$
6	$f(x,y)$	$f(y,x)$	$[x/y]$

Ejercicio 12.3 Calcular la composición de las siguientes sustituciones
$\sigma_1 = [x/f(z,a),y/w]$ y $\sigma_2 = [x/b,z/g(w)]$.

Ejercicio 12.4 Comparar los siguientes pares de sustituciones:

1. $\sigma_1 = [x/g(z),y/z]$ y $\sigma_2 = [x/g(y),z/y]$.
2. $\sigma_1 = [x/g(z),y/z]$ y $\sigma_3 = [x/g(a),y/a]$.
3. $\sigma_2 = [x/g(y),z/y]$ y $\sigma_3 = [x/g(a),y/a]$.

4. $\sigma_4 = [x/a, y/a]$ y $\sigma_5 = [y/x]$

Ejercicio 12.5 Determinar si las siguientes parejas de términos son unificables y, en el caso de que lo sean, calcular un unificador de máxima generalidad:

1. $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.
2. $f(x, b)$ y $f(a, y)$.
3. $f(x, x)$ y $f(a, b)$.
4. $f(x, g(y))$ y $f(y, x)$.
5. $j(w, a, h(w))$ y $j(f(x, y), x, z)$.
6. $j(w, a, h(w))$ y $j(f(x, y), x, y)$.
7. $f(a, y)$ y $f(a, b)$.

Ejercicio 12.6 Calcular una separación de variables de las cláusulas
$C_1 = \{P(x), Q(x, y)\}$ y $C_2 = \{R(f(x, y))\}$.

Ejercicio 12.7 Calcular una resolvente binaria de las cláusulas
$C_1 = \{\neg P(x), Q(f(x))\}$ y $C_2 = \{\neg Q(x), R(g(x))\}$.

Ejercicio 12.8 Calcular un factor de la cláusula $\{P(x, y), P(y, x), Q(a)\}$.

Ejercicio 12.9 Demostrar por resolución que los siguientes conjuntos de cláusulas son inconsistentes:

1. $S_1 = \{\{\neg P(x, f(x, y))\}, \{P(a, z), \neg Q(z, v)\}, \{Q(u, a)\}\}$.
2. $S_2 = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$.
3. $S = \{\{P(x, y), P(y, x)\}, \{\neg P(u, v), \neg P(v, u)\}\}$.

Ejercicio 12.10 Demostrar, por resolución,

1. $\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \exists x\ P(x)\} \vdash_{Res} \exists x\ Q(x)$.
2. $\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \forall x\ [Q(x) \to R(x)] \vdash_{Res} \forall x\ [P(x) \to R(x)]\}$.
3. $\vdash_{Res} \exists x\ [P(x) \to \forall y\ P(y)]$.
4. $\vdash_{Res} \forall x\ \exists\ y\ \neg(P(y, x) \leftrightarrow \neg P(y, y))$.

Ejercicio 12.11 (Paradoja del barbero de Russell) En una isla pequeña hay sólo un barbero. El gobernador de la isla ha publicado la siguiente norma:

> *"El barbero afeita a todas las personas que no se afeitan a sí misma y sólo a dichas personas".*

Demostrar que la norma es inconsistente.

Ejercicio 12.12 Comprobar, por resolución, que
$\forall x\ [P(x) \lor Q(x)] \not\models \forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x)$
y obtener un contamodelo a partir de la resolución.

12.2. Ejercios propuestos

Ejercicio 12.13 Para cada uno de los siguientes pares de términos determinar si son unificables y calcular un unificador de máxima generalidad en el caso de que lo sean.

1	$f(g(x), z)$	$f(y, h(y))$
2	$j(x, y, z)$	$j(f(y, y), f(z, z), f(a, a))$
3	$j(x, z, x)$	$j(y, f(y), z)$
4	$j(f(x), y, a)$	$j(y, z, z)$
5	$j(g(x), a, y)$	$j(z, x, f(z, z))$

Ejercicio 12.14 Demostrar o refutar, mediante resolución, cada una de las siguientes fórmulas:

1. $\exists x\ \forall y\ R(x, y) \to \forall y\ \exists x\ R(x, y)$
2. $\forall y\ \exists x\ R(x, y) \to \exists x\ \forall y\ R(x, y)$
3. $\exists x\ (P(x) \to \forall y\ P(y))$
4. $\exists x\ (P(x) \lor Q(x)) \to \exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x)$
5. $\exists x\ (P(x) \land Q(x)) \to \exists x\ P(x) \land \exists x\ Q(x)$
6. $\exists x\ P(x) \land \exists x\ Q(x) \to \exists x\ (P(x) \land Q(x))$
7. $\exists x\ P(x) \land \forall x\ Q(x) \to \exists x\ (P(x) \land Q(x))$

Ejercicio 12.15 Se consideran las siguientes fórmulas

transitiva	:=	$\forall x\ \forall y\ \forall z\ [R(x, y) \land R(y, z) \to R(x, z)]$
simétrica	:=	$\forall x\ \forall y\ (R(x, y) \to R(y, x))$
reflexiva	:=	$\forall x\ R(x, x)$
notrivial	:=	$\forall x\ \exists y\ R(x, y)$

1. Demostrar que $\{\text{transitiva}, \text{simétrica}\} \not\models \text{reflexiva}$.

2. Demostrar que $\{\text{transitiva}, \text{simétrica}, \text{notrivial}\} \models \text{reflexiva}$.

Ejercicio 12.16 Demostrar, por resolución, que si toda persona pobre tiene un padre rico, entonces existe una persona rica que tiene un abuelo rico.

Ejercicio 12.17 Demostrar mediante resolución cada una de las argumentaciones correctas de la relación de *"50 ejercicios de argumentación"*.

Ejercicio 12.18 Los números naturales pueden representarse mediante la constante 0 y el símbolo de función s. Por ejemplo, el número 3 se representa por $s(s(s(0)))$. En dicha representación puede definirse la relación $suma(x, y, z)$, que significa que z es la suma de x e y, mediante el siguiente conjunto de fórmulas

$$\begin{aligned} T = \quad & \{\forall y \; suma(0, y, y), \\ & \forall x \; \forall y \; \forall z \; [suma(x, y, z) \rightarrow suma(s(x), y, s(z))]\} \end{aligned}$$

1. Demostrar por resolución que $T \models \exists x \; suma(s(0), s(s(0)), x)$ y, a partir de la demostración encontrar un término t tal que
   $T \models suma(s(0), s(s(0)), t)$.

2. Demostrar por resolución que $T \models \exists x \; suma(x, s(s(0)), s(s(0)))$ y, a partir de la demostración encontrar un término t tal que
   $T \models suma(t, s(s(0)), s(s(0)))$.

3. Demostrar por resolución que $T \models \exists x \; \exists y \; suma(x, y, s(s(0)))$ y, a partir de la demostración encontrar términos t_1 y t_2 tales que
   $T \models suma(t_1, t_2, s(s(0)))$.

4. Demostrar por resolución que $T \models \exists x \; \exists y \; [suma(s(0), x, y) \land suma(x, y.s(0))]$ y, a partir de la demostración encontrar términos t_1 y t_2 tales que
   $T \models suma(s(0), t_1, t_2) \land suma(t_1, t_2.s(0))$.

Ejercicio 12.19 Las listas pueden representarse mediante la constante vacía nil, el símbolo de función p y constantes atómicas. Por ejemplo,

- $p(1, p(2, nil))$ representa la lista cuyos elementos son 1 y 2,
- nil representa la lista vacía,
- $p(x, y)$ representa la lista cuyo primer elemento es x y cuyo resto es y,
- $p(p(1, nil), p(2, nil))$ representa la lista cuyos elementos son las listas $p(1, nil)$ y $p(2, nil)$.

En dicha representación pueden definirse las relaciones

- $c(x,y,z)$, que significa que z es la concatenación de x e y, y
- $e(x,y)$, que significa que x es un elemento de y,

mediante el siguiente conjunto de fórmulas

$$\begin{aligned} T = \ & \{\forall y\ c(nil,y,y), \\ & \forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall u\ [c(x,y,z) \to c(p(u,x),y,p(u,z))] \\ & \forall x\ \forall y\ [\exists u\ \exists v\ c(u,p(x,v),y) \to e(x,y)]\} \end{aligned}$$

1. Demostrar por resolución que $T \models \exists x\ c(p(1,nil),p(2,p(1,nil)),x)$ y, a partir de la demostración encontrar un término t tal que
   $T \models c(p(1,nil),p(2,p(1,nil)),t)$.
2. Demostrar por resolución que $T \models \exists x\ c(x,p(2,p(1,nil)),p(1,p(2,p(1,nil))))$ y, a partir de la demostración encontrar un término t tal que
   $T \models c(t,p(2,p(1,nil)),p(1,p(2,p(1,nil))))$.
3. Demostrar por resolución que $T \models \exists x\ \exists y\ c(x,y,p(2,p(1,nil)))$ y, a partir de la demostración encontrar un término t tal que
   $T \models c(t_1,t_2,p(2,p(1,nil)))$.
4. Demostrar por resolución que $T \models \exists x\ e(x,p(2,p(1,nil)))$ y, a partir de la demostración encontrar términos t tales que
   $T \models e(t,p(2,p(1,nil)))$.

Ejercicio 12.20 Demostrar por resolución cada una de las argumentaciones válidas del ejercicio 7.34.

Ejercicios de exámenes

Ejercicio 12.21 [Examen de Septiembre de 2006] Decidir si el siguiente conjunto de fórmulas es consistente

$$\begin{aligned} S = \{ \ & \forall x\ [A(x) \land \exists y\ [\neg B(y) \to C(x,y)]], \\ & \exists x\ A(x), \\ & \neg\forall y\ \exists z\ C(z,y), \\ & \forall y\ \exists x\ \forall z\ [(B(x) \to A(z)) \to (\neg C(y,z) \to \neg B(y))]\ \} \end{aligned}$$

Si S es consistente, obtener razonadamente un modelo de S.

Ejercicio 12.22 [Examen de Septiembre de 2006] Decidir, por resolución, si la fórmula

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ [P(z,y) \leftrightarrow \neg P(z,x)]$$

es consecuencia lógica de la fórmula

$$\exists y\ \forall x\ [P(x,y) \leftrightarrow P(x,x)].$$

Ejercicio 12.23 [Examen de Junio de 2006] Se considera el siguiente argumento:

> *Algunas personas admiran a los que tienen bigote. Algunas personas no simpatizan con nadie que admire a los que tienen bigote. Luego algunas personas no son simpáticas a todos.*

1. Formalizar el argumento utilizando los símbolos $B(x)$: x tiene bigote, $A(x,y)$: x admira y, $S(x,y)$: x simpatiza con y.
2. Dedidir, mediante cualquiera de los métodos de demostración estudiados en el curso, la validez del argumento.

Ejercicio 12.24 [Examen de Junio de 2006] Se considera el conjunto

$$S = \{\forall x\ [P(x,y) \to \neg Q(z)],\ P(x,v),\ \exists u\ Q(u)\}$$

1. Probar que S es consistente.
2. Decidir si S tiene o no un modelo, justificando la respuesta.

Ejercicio 12.25 [Examen de Junio de 2006] Se consideran las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} F_1 &= \forall x\ \exists x_1\ \forall y\ \exists y_1\ \forall z\ \exists z_1\ P(x,x_1,y,y_1,z,z_1) \\ F_2 &= \exists x\ \forall x_1\ \exists y\ \forall y_1\ \exists z\ \exists u\ P(z,x,x_1,y,y_1,u) \\ F_3 &= \exists x\ \forall x_1\ \exists y\ \exists y_1\ \forall z\ \exists z_1\ P(x,x_1,y,y_1,z,z_1) \end{aligned}$$

Decidir, por resolución, las siguientes relaciones. Para las que no se verifiquen, dar un contramodelo.

1. $F_1 \models F_2$
2. $F_3 \models F_2$

Ejercicio 12.26 [Examen de Junio de 2006 (segundo parcial)] Decidir, mediante resolución, si

$$\models \exists x\ [\forall y\ [P(x,y) \lor \neg Q(y)] \to \forall x\ \forall y\ [Q(y) \to P(x,y)]]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 12.27 [Examen de Junio de 2006 (segundo parcial)] Se considera el siguiente conjunto de fórmulas

$$\begin{aligned} T = \{\ & \forall y\ P(0,y,y), \\ & \forall x\ \forall y\ \forall z\ [P(x,y,z) \to P(s(x),y,s(z))], \\ & Q(0), \\ & \forall x\ [Q(x) \to Q(s(s(x)))]\ \} \end{aligned}$$

Demostrar por resolución lineal que

$T \models \exists x\ \exists y\ [P(x, s(y), s(s(0))) \land Q(s(x))]$

y, a partir de la demostración encontrar todos los términos t_1 y t_2 tales que

$T \models P(t_1, s(t_2), s(s(0))) \land Q(s(t_1))$

Ejercicio 12.28 [Examen de Junio de 2006 (segundo parcial)] Decidir, mediante resolución, si

$\forall x\ \forall y\ [\forall z\ [P(z, x) \to P(z, y)] \to Q(x, y)] \models \forall x\ Q(x, x)$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 12.29 [Examen de Junio de 2006 (segundo parcial)] Se considera el siguiente conjunto de fórmulas

$T = \{\ \forall x\ \forall z\ R(x, p(x, z)),$
$\quad \forall x\ \forall y\ \forall z\ [R(x, z) \to R(x, p(y, z))]\}$

Demostrar por resolución lineal que

$T \models \exists x\ R(x, p(a, p(b, nil)))$

y, a partir de la demostración encontrar todos los términos t tales que

$T \models R(t, p(a, p(b, nil)))$

Ejercicio 12.30 [Examen de Junio de 2006 (segundo parcial)] Decidir, mediante resolución, si

$\models \exists x\ [P(x) \to Q(x)] \to \exists x\ P(x \to \exists x\ Q(x))$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 12.31 [Examen de Diciembre de 2005] Se considera el siguiente argumento:

Todo deprimido que estima a un submarinista es listo.
Cualquiera que se estime a sí mismo es listo.
Ningún deprimido se estima a sí mismo.
Por tanto, ningún deprimido estima a un submarinista.

Decidir, utilizando el método de resolución, si el argumento es válido. Si no es válido encontrar una interpretación en la que las premisas sean todas verdaderas y la conclusión sea falsa.
(NOTA: En la formalización, usar el siguiente vocabulario $D(x)$ significa que x está deprimido, $S(x)$ significa que x es submarinista, $L(x)$ significa que x es listo y $E(x, y)$ significa que x estima a y.)

Ejercicio 12.32 [Examen de Diciembre de 2005] Consideremos los dos siguientes enunciados en castellano

- E_1: Algunos robots sólo obedecen a los amigos del programador jefe.

- E_2: Todos los robots obedecen a los amigos del programador jefe.

y las cuatro fórmulas que siguen

- F_1: $\forall x\ \forall y\ [P(x) \land S(y,c) \to R(x,y)]$
- F_2: $\exists x\ [P(x) \land \forall y\ [R(x,y) \to S(y,c)]]$
- F_3: $\forall y\ [S(y,c) \to \neg\exists x\ [P(x) \land \neg R(x,y)]]$
- F_4: $\exists x\ \forall y\ [P(x) \land \neg(R(x,y) \land \neg S(y,c))]$

1. En una interpretación adecuada, dos de las fórmulas formalizan E_1 y las otras dos formalizan E_2. Explicar cuál es la interpretación y cuáles son las fórmulas que corresponden a cada uno de los dos enunciados.
2. Demostrar, calculando sus forma clausales, que las dos fórmulas correspondientes a E_1 son lógicamente equivalentes. Hacer lo mismo con las dos fórmulas correspondientes a E_2.
3. Consideremos ahora los nuevos enunciados:
   - E_3: Alvaro es amigo del programador jefe, pero Benito no le obedece.
   - E_4: Benito no es un robot.

   Demostrar, mediante resolución, que E_4 es consecuencia de E_2 y E_3.

Ejercicio 12.33 [Examen de Septiembre de 2005] En una pecera nadan una serie de peces. Se observa que:

1. Hay algún pez x que para cualquier pez y, si el pez x no se come al pez y entonces existe un pez z tal que z es un tiburón o bien z protege al pez y.
2. No hay ningún pez que se coma a todos los demás.
3. Ningún pez protege a ningún otro.

Decidir, utilizando el método de resolución, si de las observaciones se deduce que existe algún tiburón en la pecera.
(NOTA: En la formalización, usar el siguiente glosario $C(x,y)$ significa que "x se come a y", $P(x,y)$ significa que "x protege a y" y $T(x)$ significa que "x es un tiburón".)

Ejercicio 12.34 [Examen de Septiembre de 2005] Decidir, mediante resolución, si

$$\models \exists x\ \forall y\ \forall z\ [(P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x))]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 12.35 [Examen de Septiembre de 2005] Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Para todo conjunto de fórmula S y para toda fórmula F se verifica que si $S \not\models F$ entonces $S \models \neg F$.

2. Para toda fórmula F se tiene que si G es una forma de Skolem de F entonces $\models F \leftrightarrow G$.

Ejercicio 12.36 [Examen de Junio de 2005] Se sabe que:

- Si todo el que estudia aprueba, entonces todo el que estudia recibe un regalo.
- Hay quien estudia y no recibe ningún regalo.
- No es verdad que todo el que estudia aprueba.

Formalizar los conocimientos anteriores y probar que el conjunto de fórmulas obtenidas es consistente, proporcionando una estructura que sea modelo de cada una de las fórmulas.

Ejercicio 12.37 [Examen de Junio de 2005] Decidir, mediante resolución, si
$\exists x\ \exists y\ [(R(x,y) \lor P(x,y)) \to \forall z\ \forall w\ [R(z,w) \land Q(z,w)]]$
es consecuencia lógica de
$\neg\exists x\ \exists y\ [Q(x,y) \to P(x,y)]$
En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 12.38 [Segundo parcial del 2004–05 (Grupo 2)] Decidir, mediante resolución, si

$$\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \exists x\ P(x)\} \models \forall x\ Q(x).$$

Obtener un contramodelo en el caso de que no sea válida.

Ejercicio 12.39 [Segundo parcial del 2004–05 (Grupo 2)] Decidir, mediante resolución, si

$$\models \exists x\ \exists y\ [P(x,y) \to \forall x\ \forall y\ P(x,y)].$$

Obtener un contramodelo en el caso de que no sea válida.

Ejercicio 12.40 [Segundo parcial del 2004–05 (Grupo 1)] Decidir, mediante resolución, si la siguiente fórmula es válida $\neg\forall x\ \forall y\ \exists z\ [R(x,y) \land (R(y,z) \to \neg R(z,z))]$. Obtener, a partir de la resolución, un contramodelo en el caso de que no sea válida.

Ejercicio 12.41 [Segundo parcial del 2004–05 (Grupo 1)] Decidir, mediante resolución, si

$$\{\forall x\ P(x) \to \forall x\ Q(x)\} \models \forall x\ [P(x) \to Q(x)]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 12.42 [Examen de Diciembre de 2004] Sean S_1 y S_2 los conjuntos de fórmulas

$$S_1 = \{\forall x\ \forall y\ [P(x,y) \to P(y,x)],\quad \forall x\ \neg P(x,x),\quad \exists x\ \exists y\ P(x,y)\}$$
$$S_2 = \{\exists x\ Q(x),\quad \forall x\ [Q(x) \to R(x)],\quad \forall x\ \neg R(x)\}$$

e $\mathcal{I}_1 = (U_1, I_1), \mathcal{I}_2 = (U_2, I_2)$ las interpretaciones tales que

$U_1 = \{a,b\}$	$I_1(P) = \{(a,b),\ (b,a)\}$	$I_1(Q) = \{a,b\}$	$I_1(R) = \{b\}$
$U_2 = \{a,b,c\}$	$I_2(P) = \{(a,b),\ (b,c),\ (c,a)\}$	$I_2(Q) = \{b\}$	$I_2(R) = \{a\}$

Para cada uno de los conjuntos S_1 y S_2 determinar cuáles de las interpretaciones $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ es modelo de dicho conjunto.

Ejercicio 12.43 [Examen de Septiembre de 2004] Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones se cumplen. Para ello, dar una prueba por resolución y otra por deducción natural de cada una de las válidas y calcular un modelo de Herbrand de las que no lo son.

1. $\forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x) \models \forall x\ [P(x) \lor Q(x)]$
2. $\forall x\ [P(x) \lor Q(x)] \models \forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x)$
3. $\exists x\ [P(x) \land Q(x)] \models \exists x\ P(x) \land \exists x\ Q(x)$

Ejercicio 12.44 [Examen de Septiembre de 2004] Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado P de aridad 2.

(a) Probar que las fórmulas $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ y $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ no son equivalentes dando una estructura que sea modelo de la primera pero no de la segunda.

(b) En la estructura M cuyo universo es $|M| = \{a,b,c\}$ y $P^M = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}$, ¿cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen y cuáles no?

   1. $\forall x\ \exists y\ P(x,y) \to \exists x\ \forall y\ P(x,y)$
   2. $\exists x\ \forall y\ P(x,y) \to \forall x\ \exists y\ P(x,y)$
   3. $\neg[\forall x\ \exists y\ P(x,y) \land \exists x\ \forall y\ P(x,y)]$

Ejercicio 12.45 [Examen de Junio de 2004] Sabemos que

1. Cualquiera que estudie lo suficiente aprueba todas las asignaturas.

2. Cuando alguien que celebra su cumpleaños en julio ha aprobado todas las asignaturas, se le obsequia con un regalo.

3. Quien recibe un regalo sin estudiar lo suficiente, nunca es obsequiado con un móvil.

4. Pablo es un alumno que, a pesar de no estudiar lo suficiente, recibió un móvil como regalo.

Se pide:

(a) Formalizar los conocimientos anteriores teniendo en cuenta que los predicados del texto se representan así: $C(x) =$ "x celebra su cumpleaños en julio"; $A(x) =$ "x ha aprobado todas las asignaturas"; $S(x) =$ "x estudia lo suficiente"; $R(x,y) =$ "x recibe el regalo y". Y las constantes a y b representan respectivamente a Pablo y al móvil.

(b) Obtener el conjunto de cláusulas de las fórmulas anteriores y probar que es inconsistente dando un subconjunto de su extensión de Herbrand que lo sea.

(c) Probar, mediante resolución, que el enunciado *"Si Pablo recibe un móvil como regalo, entonces ha aprobado todas las asignaturas"* es consecuencia lógica de los enunciados 1 y 3.

Ejercicio 12.46 [Examen de Junio de 2004] Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado, Q, (de aridad 2) y un símbolo de función, f, (de aridad 1). Se considera la estructura $\mathcal{I}$ dada por: Universo: $\{a,b\}$, $Q^I = \{(a,b), (b,a)\}$, $f^I(a) = a$ y $f^I(b) = a$. Decidir cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen en la estructura:

1. $\forall x\ [Q(f(x),x) \to Q(x,x)]$

2. $\exists x\ [Q(f(x),x) \to Q(x,x)]$

Ejercicio 12.47 [Examen de Septiembre de 2003] Consideremos los siguientes hechos acerca de la sucesión de los integrantes de la monarquía inglesa:

1. El primogénito de un rey hereda la corona de dicho rey.

2. Si alguien derrota a un rey entonces hereda su corona.

3. Si alguien hereda la corona de un rey entonces se convierte en rey.

4. Enrique VIII era el primogénito de Enrique VII.

5. Ricardo III era rey y Enrique VII derrotó a Ricardo III.

Se pide:

(a) Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los símbolos de predicado: $D(x,y)$: x derrota a y, $H(x,y)$: x hereda la corona de y, $R(x)$: x es rey, $P(x,y)$: x es el primogénito de y. Las constantes a,b,c denotarán, respectivamente, a Ricardo III, Enrique VII y Enrique VIII.

(b) A partir de la información anterior, probar, mediante resolución, que Enrique VIII fue rey.

Ejercicio 12.48 [Examen de Septiembre 2003] Se considera el lenguaje $L_1 = \{P, f, a, b\}$ y el conjunto de fórmulas:

$$\begin{aligned} S = \{ \ & \forall x \ [P(a,x) \to P(b, f(x))], \\ & \forall x \ [P(f(x), x) \to \forall z \ P(z,b)], \\ & P(a, f(a)) \land P(f(b), b)\} \end{aligned}$$

Probar, proporcionando un modelo de Herbrand, que $S \not\models \exists x \ [P(x,a) \land P(f(x), b)]$.

Ejercicio 12.49 [Examen de Septiembre de 2003] Hallar las formas prenexa, de Skolem y clausal de la fórmula: $\neg\exists x \ \forall z \ [P(x) \to \neg Q(z)] \lor \exists z \ A(y, z \to \exists u \ B(y,u))$

Ejercicio 12.50 [Examen de Junio de 2003] Supongamos conocidos los siguientes hechos acerca del número de aprobados de dos asignaturas A y B:

1. Si todos los alumnos aprueban la asignatura A, entonces todos aprueban la asignatura B.
2. Si algún delegado de la clase aprueba A y B, entonces todos los alumnos aprueban A.
3. Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.
4. Si Manuel no aprueba B, entonces nadie aprueba B.

Se pide:

(a) Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los siguientes símbolos de predicado: $D(x)$: "x es un delegado", $Ap(x,y)$: "x aprueba la asignatura y". Las constantes a, b, m denotarán la asignatura A, la asignatura B y a Manuel, respectivamente.

(b) Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas del apartado anterior.

(c) Probar, mediante resolución, que si Manuel es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B.

Ejercicio 12.51 [Examen de Junio 2003] Consideramos el lenguaje $L_1 = \{P, f, a, b, c\}$ y el conjunto de fórmulas:

$$S = \{P(c, a) \to \forall z\ P(z, b), \forall x\ [P(f(x), x) \to \forall z\ P(z, x)], \neg P(b, c)\}$$

Probar, proporcionando un modelo de Herbrand, que $S \not\models P(f(a), a) \lor \neg P(f(b), b)$.

Ejercicio 12.52 [Examen de Septiembre de 2002] Se considera el lenguaje de primer orden $L = \{P, Q\}$ y las fórmulas de L:

$F_1 : \exists x\ [P(x) \land Q(x)]$.
$F_2 : \exists x\ P(x) \land \exists x\ Q(x)$,
$F_3 : \exists x\ \exists y\ [P(x) \land Q(y)]$

1. Hallar una L estructura $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models F_2$ pero $\mathcal{I} \not\models F_1$.

2. Probar que todo modelo de F_1 es modelo de F_2.

3. Probar que F_2 y F_3 son lógicamente equivalentes.

Ejercicio 12.53 [Examen de Junio de 2002] En cierto país oriental se ha celebrado la fase final del campeonato mundial de fútbol. Cierto diario deportivo ha publicado las siguientes estadísticas de tan magno acontecimiento:

- A todos los porteros que no vistieron camiseta negra les marcó un gol algún delantero europeo.

- Algún portero jugó con botas blancas y sólo le marcaron goles jugadores con botas blancas.

- Ningún portero se marcó un gol a sí mismo.

- Ningún jugador con botas blancas vistió camiseta negra.

Se pide:

1. Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los siguientes símbolos de predicado: $P(x)$: "x es portero", $D(x)$: "x es delantero europeo", $N(x)$: "x viste camiseta negra", $B(x)$: "x juega con botas blancas", $M(x, y)$: "x marcó un gol a y".

2. Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas del apartado anterior.

3. Probar, mediante resolución, que algún delantero europeo jugó con botas blancas.

Ejercicio 12.54 [Examen de Septiembre de 2001] Se conocen los siguientes hechos:

1. Todos los ordenadores son máquinas.

2. El TX–150 es un ordenador.
3. Félix puede arreglar, o bien estropear, cualquier máquina.
4. Cada cosa puede ser arreglada por alguien.
5. Las cosas solamente desesperan a quienes no son capaces de arreglarlas.
6. El TX–150 desespera a Félix.
7. Ninguna máquina puede ser arreglada por sí misma.

Se pide:

(a) Formalizar los hechos anteriores utilizando los siguientes símbolos de predicado: $O(x)$: "x es un ordenador", $M(x)$: "x es una máquina", $A(x,y)$: "x puede arreglar y", $E(x,y)$: "x estropea y" y $D(x,y)$: "x desespera a y" . Y a, b como constantes para TX–150 y Félix, respectivamente.

(b) Utilizando resolución responder a las siguientes preguntas: ¿Puede arreglar Félix el TX–150? ¿Estropea Félix el TX–150?

Ejercicio 12.55 [Examen de Junio de 2001] Las relaciones de parentesco verifican la siguientes propiedades generales:

- Si x es hermano de y, entonces y es hermano de x.
- Todo el mundo es hijo de alguien.
- Nadie es hijo del hermano de su padre.
- Cualquier padre de una persona es también padre de todos los hermanos de esa persona.
- Nadie es hijo ni hermano de sí mismo.

Tenemos los siguientes miembros de la familia Peláez: Don Antonio, Don Luis, Antoñito y Manolito y sabemos que Don Antonio y Don Luis son hermanos, Antoñito y Manolito son hermanos, y Antoñito es hijo de Don Antonio. Se pide:

1. Formalizar los conocimientos anteriores en un lenguaje de primer orden usando tan solo:
   - A, L, a, m como constantes para D. Antonio, D. Luis, Antoñito y Manolito, respectivamente.
   - Los predicados: $\mathsf{Her}(x,y)$ = "x es hermano de y", $\mathsf{Hijo}(x,y)$ = "x es hijo de y".

2. Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas obtenido en el apartado 1.

3. Decidir mediante resolución si Don Luis es el padre de Manolito o no.

Bibliografía

[1] J.A. Alonso *Temas de "Lógica informática"(2008-09)* (Univ. de Sevilla, 2008).

[2] J.A. Alonso *Soluciones de exámenes de Lógica informática* (Univ. de Sevilla, 2008).

[3] L. Arenas *Lógica formal para informáticos.* (Ed. Díaz de Santos, 1996)

[4] C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal* (Ariel, 2000)

[5] M. Ben–Ari *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)

[6] R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998).

[7] C.–L. Chang y R.C.–T. Lee *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving* (Academic Press, 1973).

[8] J. Cuena *Lógica Informática* (Alianza Ed., 1985)

[9] J.A. Díez *Iniciación a la Lógica* (Ed. Ariel, 2002)

[10] J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional*. (UNED, 2003)

[11] M. Fitting *First–Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1996)

[12] J.H. Gallier *Logic for computer science (foundations of automatic theorem Proving)* (June 2003)

[13] M. Genesereth *Computational Logic* (Stanford University, 2003)

[14] S. Hölldobler *Computational logic.* (U. de Dresden, 2004)

[15] Hortalá, M.T.; Leach, J. y Rogríguez, M. *Matemática discreta y lógica matemática* (Ed. Complutense, 1998)

[16] M. Huth y M. Ryan *Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems* (Cambridge University Press, 2000)

[17] M. Manzano y A. Huertas *Lógica para principiantes* (Alianza editorial, 2004)

[18] Nerode, A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)

[19] R. Nieuwenhuis *Lógica de primer orden.* (U. Politénica de Cataluña, 2003)

[20] N.J. Nilsson *Inteligencia artificial (Una nueva síntesis)* (McGraw–Hill, 2001).

[21] M. Ojeda e I. Pérez de Guzmán *Lógica para la computación* (Ágora, 1997)

[22] E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)

[23] L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002)

[24] U. Schöning *Logic for Computer Scientists*, (Birkäuser, 1989)